JOUKKO-OPIN ALKEITA

Veikko Rantala – Ari Virtanen[1] 2006

1 Joukon käsite

Joukon voisi yrittää määritellä ”kokoelmaksi olioita”, mutta tämä edellyttää, että ymmärretään mitä ”olioilla” ja ”kokoelmalla” tarkoitetaan. Helpompaa kuin määritellä joukon käsite on antaa esimerkkejä yksittäisistä joukoista. Olioita, joista joukko muodostuu, kutsutaan joukon *alkioiksi*. Joukko voidaan antaa esimerkiksi luettelemalla kaikki sen alkiot aaltosulkeiden '{' ja '}' välissä. Kaikkien ominaisuuden P omaavien olioiden muodostamalle joukolle voidaan käyttää merkintää

$$\{\, x \mid x\text{:llä on ominaisuus } P \,\}.$$

Joukkoja merkitään yleensä isoilla kirjaimilla ja alkioita pienillä. Jos a on joukon A alkio, niin merkitään $a \in A$. Jos a ei ole joukon A alkio, niin merkitään $a \notin A$.

Esimerkki 1.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Prop} = \{\, p \mid p \text{ on lauselogiikan atomilause} \,\} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\},\ p_{100} \in \mathrm{Prop},\\
&P_1 = \{\, p_i \in \mathrm{Prop} \mid i \text{ on pariton} \,\} = \{p_1, p_3, p_5, \ldots\},\ p_2 \notin P_1,\ p_{101} \in P_1,\\
&\{\, x \mid x \text{ on logiikan peruskurssilla käytettävä konnektiivi} \,\} = \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\},\\
&\mathbb{N} = \{\, x \mid x \text{ on luonnollinen luku} \,\} = \{0, 1, 2, \ldots\},\ -1 \notin \mathbb{N},\\
&\mathbb{Z} = \{\, x \mid x \text{ on kokonaisluku} \,\} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\},\ \tfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z},\\
&\mathbb{Z}_+ = \{\, x \mid x \text{ on positiivinen kokonaisluku} \,\} = \{1, 2, 3, \ldots\},\ 0 \notin \mathbb{Z}_+,\\
&\mathbf{L}_{PL} = \{\, A \mid A \text{ on lauselogiikan kaava} \,\},\ (p_1 \wedge (p_2 \vee p_1)) \in \mathbf{L}_{PL}.
\end{aligned}$$

On huomattava, että joukon alkiot voivat olla myös itse joukkoja. Esimerkiksi joukon $\{\{p_1\}, \{p_1, \neg p_1\}, \{p_1, p_2, p_1 \wedge p_2\}\}$ kaikki kolme alkiota ovat lauselogiikan kaavojen muodostamia joukkoja. Joukolla $\big\{\{1, \{1\}\}\big\}$ on vain yksi alkio, nimittäin joukko $\{1, \{1\}\}$, jolla on kaksi alkiota, 1 ja $\{1\}$.

1.1 Joukkojen samuus

Joukko-oppi on *ekstensionaalista*: Kaksi joukkoa A ja B ovat samoja, $A = B$, täsmälleen silloin, kun niillä on samat alkiot: $x \in A$, jos ja vain jos $x \in B$.

Saman joukon alkiot voidaan luonnehtia usealla eri tavalla ja sen alkiot voidaan esittää eri järjestyksissä. Myöskään sillä ei ole merkitystä, onko jokin olio ilmoitettu joukon alkioksi useamman kuin yhden kerran.

Esimerkki 2.

$$\begin{aligned}
&\{\, p_i \mid p_i \text{ atomilause, jonka indeksi } i \text{ on 1, 2 tai 3} \,\}\\
&= \{p_1, p_2, p_3\} = \{p_3, p_2, p_1\} = \{p_1, p_2, p_2, p_3, p_3, p_3\}.
\end{aligned}$$

[1] Jälkimmäinen tekijä kiittää Tampereen Yliopiston Tukisäätiötä saamastaan apurahasta, joka osaltaan mahdollisti tämän esityksen kirjoittamisen. Tekstin teknisestä toimitustyöstä tekijät kiittävät Jarmo Niemelää.

1.2 Intensio ja ekstensio[2]

Tarkastelemme vielä hieman tarkemmin ekstensionaalisuutta. Kielellisten ilmausten luokka *termit* jakaantuu *yksilötermeihin* ja *predikaatteihin*. Yksilötermit toimivat jonkin olion nimenä, ns. yksipaikkaiset predikaatit ilmaisevat olioiden ominaisuuksia (monipaikkaiset ilmaisevat suhteita, mutta niitä emme tässä käsittele). (Huomaa, että predikaattilogiikassa on tapana kutsua yksilövakioita ja -muuttujia termeiksi.)

Yksilötermin *ekstensio* on se olio (tai yksilö), jonka nimi tämä termi on. Esimerkiksi yksilötermin 'Johdatus tieteenfilosofiaan -kirjan kirjoittanut Ilkka Niiniluoto' ekstensio on Helsingin yliopiston rehtori Ilkka Niiniluoto. Ominaisuutta ilmaisevan predikaatin ekstensio on kaikki ne oliot, joilla on kyseinen ominaisuus. Predikaatin 'filosofian professori' ekstensio on siis kaikkien filosofian professoreiden joukko. Termin ekstensio voi olla myös tyhjä, kuten termien 'Suomen kuningas vuonna 2000' tai 'Yhdysvaltain presidentiksi 1900-luvulla valittu nainen'.

Termin *intensiota* kutsutaan *käsitteeksi*. Yksilötermin intensio on yksilökäsite ja yksipaikkaisen predikaatin intensio on *ominaisuus*. Intension ajatellaan määräävän ekstension: jos kahden yksipaikkaisen predikaatin intensiot ovat samoja, niin myös niiden ekstensiot ovat samoja. Termien 'poikamies' ja 'naimaton mies' intensiot lienevät samat, ja kaikkien poikamiesten joukko on sama kuin kaikkien naimattomien miesten joukko. Termeillä 'nainen' ja 'mies' on sekä eri intensiot että eri ektensiot. Yksilötermeillä 'Aamutähti' ja 'Iltatähti' on eri intensiot, mutta niiden ekstensio on sama, nimittäin planeetta Venus.

Joukko-opin ekstensionaalisuuden voidaan nyt tarkentaa tarkoittavan sitä, että jos luonnehdimme kielen termien avulla joukkoja, niin vaikka näillä termeillä olisikin eri intensio, niin joukot katsotaan kuitenkin samoiksi, jos näiden termien ekstensiot ovat samat.

Esimerkki 3. Selvästikin termien 'peräkkäiset alkuluvut', 'yhtälön $x^2 - 5x + 6$ ratkaisut' ja 'kokonaisluvut, jotka ovat suurempia kuin 1 ja pienempiä kuin 4' intensiot eroavat, mutta jokaisen ekstensio on sama eli joukko $\{2, 3\}$.

Esimerkki 4. Termien 'simpanssin tekemä tietokoneohjelma' ja 'virheettömästi toimiva Microsoftin ohjelmisto' intensiot eivät varmastikaan ole samat, mutta ekstensiot lienevät samat.

Esimerkki 5. Ymmärrämme helposti termin 'opiskelija, joka on kiinnijäämättä syyllistynyt vilppiin yliopiston tentissä 1.1.2000 jälkeen' intension, mutta kukaan ei kai tiedä sen ekstensiota.

1.3 Osajoukko

Joukko A on joukon B osajoukko, $A \subseteq B$, jos jokainen joukon A alkio on joukon B alkio: jos $x \in A$, niin $x \in B$.

[2]Tämän kappaleen esitys perustuu Ilkka Niiniluodon kirjaan *Johdatus tieteenfilosofiaan* (Kustannusosakeyhtiö Otava, Helsinki, 1980), ss. 119–122.

Joukko A on joukon B *aito osajoukko*, $A \subset B$, jos $A \subseteq B$ ja $A \neq B$. Jos siis A on joukon B aito osajoukko, niin jokainen A:n alkio kuuluu joukkoon B ja lisäksi joukossa B on ainakin yksi alkio, joka ei kuulu joukkoon A.

Esimerkki 6. Kaikkien lauselogiikan kaavojen joukon $\mathbf{L}_{PL}$ (aitoja) osajoukkoja ovat:

$$\begin{aligned}&\{p_1, p_2, p_3, \ldots\} \subset \mathbf{L}_{PL},\\ &\{p_1, \neg p_1, \neg\neg p_1, \ldots\} \subset \mathbf{L}_{PL},\\ &\{p_1, p_2, \neg p_1, (p_1 \wedge \neg p_2), (p_1 \vee \neg p_2), (p_1 \rightarrow \neg p_2), (p_1 \leftrightarrow \neg p_2)\} \subset \mathbf{L}_{PL}.\end{aligned}$$

Esimerkki 7. Positiivisten kokonaislukujen joukko on luonnollisten lukujen joukon aito osajoukko, joka taasen on kokonaislukujen joukon aito osajoukko:

$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

1.4 Tyhjä joukko

Tyhjäksi joukoksi kutsutaan joukkoa, jossa ei ole yhtään alkiota. Tyhjälle joukolle käytetään merkintää $\emptyset$. Myös merkintää $\{\ \}$ voidaan käyttää. Tyhjä joukko on minkä tahansa joukon osajoukko: $\emptyset \subseteq A$ aina, kun A on joukko.

Tyhjä joukko voidaan määritellä formaalisti seuraavasti: $\emptyset = \{\, x \mid x \neq x \,\}$. Tyhjä joukko muodostuu siis kaikista niistä olioista, jotka eivät ole identtisiä itsensä kanssa. Koska kaikki oliot ovat identtisiä itsensä kanssa, ei tässä joukossa ole yhtään alkiota. Voimme myös sanoa, että predikaatin 'olio, joka ei ole identtinen itsensä kanssa' ekstensio on tyhjä joukko. Edellä on ollut esimerkkejä muista predikaateista, joiden ekstensio on myös tyhjä joukko.

1.5 Potenssijoukko

Joukon A potenssijoukko $\mathcal{P}(A)$ on kaikkien A:n osajoukkojen muodostama joukko:

$$\mathcal{P}(A) = \{\, X \mid X \subseteq A \,\}.$$

Esimerkki 8. Olkoon $A = \{1, 2\}$ ja $B = \{1, 2, 3\}$. Tällöin

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, A\big\},\\ &\mathcal{P}(B) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, B\big\}.\end{aligned}$$

Esimerkki 9. Olkoon $W = \{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$. Koska esimerkiksi $\{w_1\} \subseteq W$, $\{w_1, w_2\} \subseteq W$ ja $W \subseteq W$, niin $\{w_1\} \in \mathcal{P}(W)$, $\{w_1, w_2\} \in \mathcal{P}(W)$ ja $W \in \mathcal{P}(W)$.

2 Joukko-opillisia operaatioita

Yksinkertaisimmat joukko-opilliset operaatiot ovat unioni, leikkaus ja joukko-opillinen erotus.

Joukkojen A ja B unioni $A \cup B$ on sellainen joukko, johon kuuluvat sekä joukon A että B alkiot ja jossa ei ole muita alkioita:

$$x \in A \cup B, \text{ jos ja vain jos } x \in A \text{ tai } x \in B.$$

Joukkojen A ja B leikkaus $A \cap B$ on sellainen joukko, johon kuuluvat joukkojen A ja B yhteiset alkiot ja vain ne:

$$x \in A \cap B, \text{ jos ja vain jos } x \in A \text{ ja } x \in B.$$

Joukkojen A ja B joukko-opillinen erotus $A \setminus B$ saadaan, kun A:sta poistetaan joukon B alkiot:

$$x \in A \setminus B, \text{ jos ja vain jos } x \in A \text{ ja } x \notin B.$$

Nämä joukot voidaan esittää käyttäen lauselogiikan konnektiiveja seuraavasti:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \\ A \cap B &= \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \\ A \setminus B &= \{x \mid x \in A \wedge \neg(x \in B)\}. \end{aligned}$$

Esimerkki 10. Olkoon $A = \{w_1, w_2\}$ ja $B = \{w_2, w_3\}$. Tällöin

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{w_1, w_2, w_3\}, \\ A \cap B &= \{w_2\}, \\ A \setminus B &= \{w_1\}, \\ B \setminus A &= \{w_3\}. \end{aligned}$$

2.1 Perusjoukko ja komplementti

Usein tarkastellaan vain sellaisia joukkoja, joiden alkiot ovat tietyn annetun perusjoukon alkioita. Tarkasteltaessa joukkoja, joiden alkiot ovat lauselogiikan kaavoja, perusjoukkona on kaikkien kaavojen joukko $\mathbf{L}_{PL}$. Mahdollisten maailmojen semantiikassa esiintyy perusjoukkona (tarkasteltavan mallin) kaikkien mahdollisten maailmojen muodostama joukko W.

Kun U on perusjoukko, niin joukkojen A ja B samuus tarkoittaa sitä, että $\forall x \in U\colon x \in A \Leftrightarrow x \in B$. Usein matematiikan puoliformaalissa kielessä on kuitenkin tapana jättää universaalikvanttori pois implikaation tai ekvivalenssin sisältävistä kaavoista ja joukkojen samuuden määritelmä esitetään seuraavasti:

$$A = B, \text{ jos ja vain jos } x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

Vastaavasti voidaan osajoukon määritelmä esittää seuraavasti:

$$A \subseteq B, \text{ jos ja vain jos } x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Tässäkin oletetaan kvantifioitavan perusjoukon alkioiden yli.

Predikaattilogiikan kielessä, jossa on käytettävissä identiteetti '=' ja kaksipaikkaiset predikaattisymbolit '∈' ja '⊆', nämä määritelmät vastaavat kaavoja

$$\forall x\, \forall y \big(x = y \leftrightarrow \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y)\big)$$

ja

$$\forall x\, \forall y \big(x \subseteq y \leftrightarrow \forall z (z \in x \rightarrow z \in y)\big).$$

Näin formaalia kieltä käytetään erityisesti *aksiomaattisessa joukko-opissa*.[3]

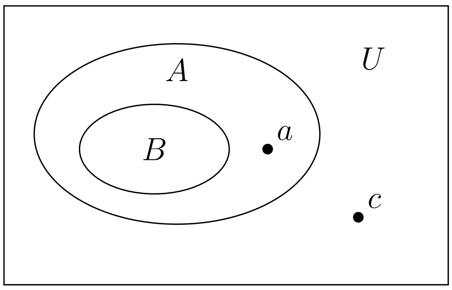
Jos U on perusjoukko, niin joukko-opillista erotusta $U \setminus A$ kutsutaan joukon A komplementiksi (perusjoukon U suhteen). Jos perusjoukosta ei ole epäselvyyttä, voidaan merkitä $\overline{A}$ (myös merkintää $-A$ käytetään).

Esimerkki 11. Olkoon perusjoukkona $W = \{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$, $A = \{w_1, w_2\}$, $B = \{w_1, w_3, w_5, \ldots\}$ ja $C = \{w_2, w_4, w_6, \ldots\}$. Tällöin

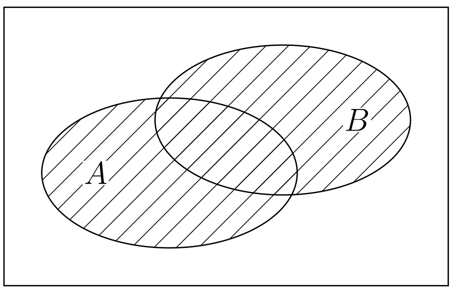
$$\begin{aligned} \overline{A} &= \{w_3, w_4, w_5, \ldots\}, \\ \overline{B} &= C, \\ \overline{C} &= B. \end{aligned}$$

2.2 Venn-diagrammi

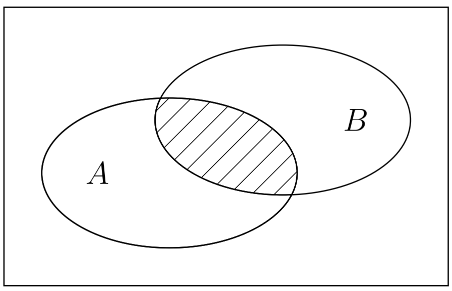
Joukkoja ja niiden välisiä operaatioita voidaan havainnollistaa ns. Venn-diagrammien avulla:



$a \in A$, $c \notin A$, $B \subseteq A$,
U perusjoukko

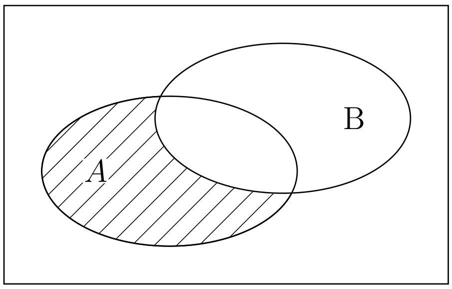


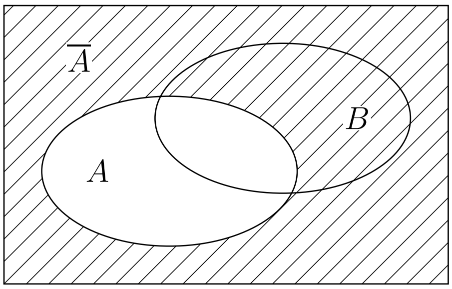
$A \cup B$



$A \cap B$

[3]Käytämme siis puoliformaalissa kielessä kaksoisnuolia ⇒ ja ⇔ lyhenteinä ilmaisuille 'jos ..., niin ...' ja '... jos ja vain jos ...'. Logiikan objektikielessä näitä vastaavat merkinnät → ja ↔.

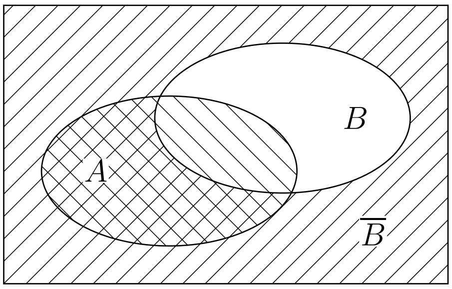




$A \setminus B$ $\quad$ $\overline{A}$

Venn-diagrammien avulla voi tutkia joukko-opillisten operaatioiden avulla muodostettujen joukkojen mahdollista samuutta. Näin ei saada matemaattista todistusta joukkojen samuudelle, mutta sovellettaessa joukko-oppia saattaa riittää Venn-diagrammien antama tieto joukoista.

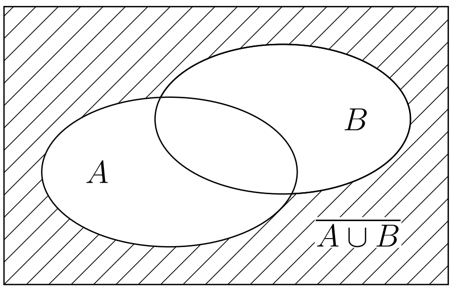
Esimerkki 12. Teemme joukon $A \cap \overline{B}$ Venn-diagrammin.

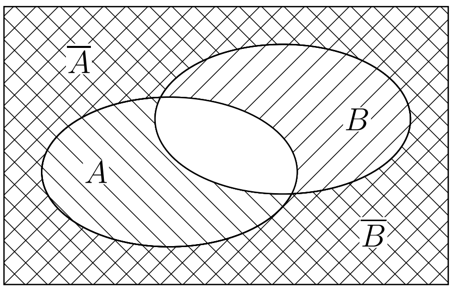


$A \cap \overline{B}$

Saamme siis samanlaisen lopputuloksen kuin joukon $A \setminus B$ Venn-diagrammissa. Voidaankin todistaa, että $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Esimerkki 13. Tarkastelemme joukkoja $\overline{(A \cup B)}$ ja $(\overline{A} \cap \overline{B})$ Venn-diagrammin avulla.





$\overline{A \cup B}$ $\quad$ $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$

Nämä joukot näyttäisivät olevan samoja (näin onkin ja tämä voidaan sitovasti todistaa).

2.3 Järjestetty pari ja n-jono

Joukon $\{a, b\}$ merkintätavassa ei ole merkitystä sillä, missä järjestyksessä alkiot a ja b luetellaan. Alkioiden a ja b muodostamalle järjestetylle parille käytetään merkintää $\langle a, b\rangle$. Myös merkintää (a, b) käytetään. Tässä alkioiden järjestys on merkitsevä. Järjestetyt parit $\langle a, b\rangle$ ja $\langle c, d\rangle$ ovat siis samat, jos ja vain jos kummankin ensimmäinen alkio on sama (siis $a = c$) ja myös toinen alkio on kummassakin sama (siis $b = d$).

Järjestetylle jonolle, jossa on n jäsentä ja jonka ensimmäinen jäsen on a_1, toinen a_2 jne., käytetään merkintää $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$. Kaksi järjestettyä n-jonoa ovat samat vain silloin, kun niissä esiintyy samat alkiot samassa järjestyksessä.

Esimerkki 14.

$$\begin{aligned}
\langle 1, 2, 3\rangle &= \langle x, y, z\rangle, \text{ jos ja vain jos } x = 1,\ y = 2 \text{ ja } z = 3,\\
\langle 1, 2\rangle &\neq \langle 2, 1\rangle,\\
\langle 1, 1, 2\rangle &\neq \langle 1, 2\rangle.
\end{aligned}$$

2.4 Tulojoukko

Kahden joukon A ja B tulojoukko (eli *karteesinen tulo*) $A \times B$ on joukko, joka muodostuu kaikista järjestetyistä pareista $\langle a, b\rangle$, joissa $a \in A$ ja $b \in B$:

$$A \times B = \{\, \langle a, b\rangle \mid a \in A \text{ ja } b \in B \,\}.$$

Vastaavasti määritellään joukkojen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tulojoukko

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{\, \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle \mid a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2,\ \ldots,\ a_n \in A_n \,\}.$$

Jos tässä $A_i = A$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, niin merkitään myös $A^n = A \times A \times \cdots \times A$.

Esimerkki 15.

$$\begin{aligned}
\{1, 2\} \times \{a, b, c\} &= \{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 1, c\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 2, c\rangle\},\\
\{1, 2\} \times \{1, 2\} \times \{1, 2\} &= \{\langle 1, 1, 1\rangle, \langle 1, 1, 2\rangle, \langle 1, 2, 1\rangle, \langle 1, 2, 2\rangle,\\
&\qquad \langle 2, 1, 1\rangle, \langle 2, 1, 2\rangle, \langle 2, 2, 1\rangle, \langle 2, 2, 2\rangle\}\\
\{1, 2\} \times \{a\} \times \{b\} \times \{c, d\} &= \{\langle 1, a, b, c\rangle, \langle 2, a, b, c\rangle, \langle 1, a, b, d\rangle, \langle 2, a, b, d\rangle\}.
\end{aligned}$$

Kirjallisuudessa näkee esitettävän hyvinkin monimutkaisen näköisiä järjestettyjä jonoja. Jonon jäsenet voivat olla esimerkiksi erilaisia joukko-opillisia konstruktioita.

Esimerkki 16. Olkoon $A = \{1, 2, 3\}$ ja $B = \{a, b\}$. Tulojoukon $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ alkioita ovat esimerkiksi $\langle \emptyset, \emptyset\rangle$, $\langle \{1, 2\}, \{a\}\rangle$, $\langle \{1, 2\}, B\rangle$ ja $\langle A, B\rangle$.

Usein tällaista kompleksista järjestettyä jonoja kutsutan *struktuuriksi.* Kyse on tällöin usein vain siitä, että tarkasteluissa on mukana joukko-opillisia olioita, joilla on eri ”toimenkuva”.

Esimerkki 17. Lauselogiikan kieli voidaan luonnehtia struktuuriksi $\langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathbf{L}_{PL} \rangle$, missä $\mathcal{A}$ on perussymbolien muodostama struktuuri, $\mathcal{R}$ on kaavanmuodostussääntöjen muodostama joukko ja $\mathbf{L}_{PL}$ on kaikkien hyvin muodostettujen ilmaisujen joukko.

Logiikan peruskurssilla käytetyn lauselogiikan kielen perussymbolit $\mathcal{A}$ voidaan esittää struktuurina $\langle \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}, \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}, \{(,)\} \rangle$. Kaavanmuodostussääntöjen "joukko-opillista ilmiasua" tarkastelemme esimerkissä **??** (s. **??**).

2.5 Luokka

Filosofi ja loogikko Bertrand Russell huomasi, että ei voi olla olemassa joukkoa $M = \{ X \mid X \notin X \}$, sillä sekä oletus $M \in M$ että oletus $M \notin M$ johtaa ristiriitaan. Jos nimittäin $M \in M$, niin joukon M pitää toteuttaa ehto $M \notin M$. Jos taas $M \notin M$, niin joukko M toteuttaa sen alkioille asetetun ehdon ja täten $M \in M$. Lyhyesti nämä ristiriitaisuuksiin johtavat päätelmät voi esittää myös seuraavasti:

$$M \in M \Leftrightarrow M \notin M.$$

Russellin paradoksi osoittaa, että ei voi olettaa "joukon"

$$\{ x \mid x \text{ on olio, jolla on tietty ominaisuus } P \}$$

olevan aina joukko. Sanan "joukko" tilalla käytetäänkin tällaisissa yhteyksissä teknistä termiä *luokka*.

Esimerkiksi kaikkien joukkojen muodostama kokonaisuus on "liian iso", jotta voisimme kutsua sitä joukoksi. Puhutaankin kaikkien joukkojen luokasta. Vastaavasti voimme puhua esimerkiksi kaikkien mahdollisten maailmojen luokasta.

Semantiikassa käytetään erilaisia joukko-opillisia konstruktioita ja kerrotaan (esimerkiksi antamalla kaavojen "totuusmääritelmä"), miten tarkasteltavan objektikielen kaavat tulkitaan näissä joukko-opillisissa struktuureissa. Voimme abstraktisti esittää jonkin tietyn semantiikan luokkana $\langle \mathcal{S}, \mathcal{I} \rangle$, missä $\mathcal{S}$ on kaikkien kyseisen semantiikan "sallimien" joukko-opillisten struktuurien luokka ja osastruktuuri $\mathcal{I}$ sisältää säännöt siitä, miten kielen kaavat tulkitaan näissä struktuureissa. Yleensä näin saatava kaikkien sallittujen struktuurien luokka on niin "laaja", ettei sitä voi pitää joukkona.

3 Mahdollisten maailmojen semantiikka

Tarkastelemme tässä alaluvussa joukko-opin sovelluksena mahdollisten maailmojen semantiikka. Olkoon W (jollain mielekkäällä tavalla määritelty) kaikkien mahdollisten maailmojen luokka, A tarkasteltavan kielen lause ja $w \in W$ mahdollinen maailma. Merkitsemme $w \vDash A$, jos A on tosi maailmassa w, ja $w \nvDash A$, jos se on epätosi maailmassa w.

Määrittelemme, että lauseen A määräämä totuusjoukko $\|A\|$ on kaikkien niiden W:hen kuuluvien maailmojen luokka, joissa A on tosi. Siis

$$\|A\| = \{ w \in W \mid w \vDash A \} \subseteq W,$$

ja A on tosi mahdollisessa maailmassa w, jos ja vain jos $w \in \|A\|$.

Erityisesti mahdollisten maailmojen semantiikan yhteydessä totuusjoukkoa kutsutaan myös propositioksi. Jälkimmäinen on kuitenkin yleisempi filosofinen käsite. S. Albert Kivisen[4] mukaan propositioteorioita on monenlaisia, eikä asiasta vallitse yleistä konsensusta. Hänen mukaansa voidaan erottaa ainakin kolme tapaa tulkita tämä käsite: (1) Propositiot ovat (väite)lauseiden merkityssisältöjä. (2) Propositiot ovat totuusarvon kantajia; jotain mikä on ensisijaisesti tosi tai epätosi (joskus erityisesti matematiikassa onkin tapana kutsua lausetta, jolla on totuusarvo, propositioksi ilman, että sen tarkemmin määritellään proposition käsite). (3) Propositiot ovat propositionaalisten ("psykologisten") asenteiden kohteita: jotakin, mitä voidaan uskoa, väittää jne.

Mahdollisten maailmojen semantiikassa voidaan ajatella lauseen totuusjoukon määrävän lauseen merkityksen: lauseen merkitys on sama asia kuin se, missä maailmoissa lause on tosi. Tätä näkemystä on kuitenkin kritisoitu. Vaikka lauseen sisältö eli merkitys määrääkin sen, millaisissa tilanteissa lause on tosi, millaisissa epätosi, niin merkitys ei kuitenkaan välttämättä ole sama asia kuin lauseen määräämä totuusjoukko.

Saamme helposti seuraavan yhteyden lauselogiikan konnektiivien ja joukko-opin operaatioiden välille:

$$\begin{aligned}\|\neg A\| &= W \setminus \|A\|,\\ \|A \wedge B\| &= \|A\| \cap \|B\|,\\ \|A \vee B\| &= \|A\| \cup \|B\|.\end{aligned}$$

Koska oletamme perusjoukoksi kaikkien mahdollisten maailmojen luokan W, voimme myös merkitä $W \setminus \|A\| = \overline{\|A\|}$. Voidaan todistaa, että

$$\begin{aligned}\|A \to B\| &= \overline{\|A\|} \cup \|B\|,\\ \|A \leftrightarrow B\| &= \big(\|A\| \cap \|B\|\big) \cup \big(\overline{\|A\|} \cap \overline{\|B\|}\big).\end{aligned}$$

Olemme määritelleet lauselogiikan semanttisia käsitteitä lauselogiikan mallien avulla. Mallit voidaan samastaa mahdollisten maailmojen kanssa, ja semanttisia käsitteitä voidaankin luonnehtia myös totuusjoukkoja koskevien joukko-opillisten ehtojen avulla. Alla olevissa luonnehdinnoissa pitäisi luokan W olla oikeastaan parametrina, koska se ei ole yksikäsitteisesti annettu kaikissa tapauksissa. Ajatellaan kuitenkin seuraavassa, että W on kiinnitetty niin, että kaikki määritelmät on suhteutettu tähän annettuun mahdollisten maailmojen luokkaan, jolloin sitä ei aina tarvitse erikseen mainita.

Lause A on

- *loogisesti tosi* eli *välttämätön*, jos A on tosi kaikissa mahdollisissa maailmoissa: $\|A\| = W$
- *loogisesti epätosi* eli *mahdoton*, jos A ei ole tosi missään maailmassa eli on epätosi kaikissa maailmoissa: $\|A\| = \emptyset$

[4] Analyysin paradoksi, http://www.tsv.fi/ttapaht/013/kivinen.htm

- *toteutuva* eli *mahdollinen*, jos A on tosi jossakin maailmassa: $\|A\| \neq \emptyset$
- *kumoutuva*, jos A on epätosi jossakin maailmassa: $\|A\| \neq W$
- *kontingentti* jos A on mahdollinen mutta ei välttämätön: $\emptyset \neq \|A\| \neq W$.

Tarkastelemme seuraavaksi kahden tai useamman lauseen välisiä semanttisia suhteita. Lauseesta A *seuraa loogisesti* lause B eli $A \vDash B$, jos B on tosi jokaisessa maailmassa, jossa A on tosi: $\|A\| \subseteq \|B\|$. Vastaavasti $A_1, A_2, \ldots, A_k \vDash B$, jos aina, kun $w \vDash A_1$, $w \vDash A_2$, $\ldots$, $w \vDash A_n$, niin $w \vDash B$ eli siis

$$\|A_1\| \cap \|A_2\| \cap \cdots \cap \|A_k\| \subseteq B.$$

Lauseet A ja B ovat *loogisesti ekvivalentteja*, jos ne määrittävät saman totuusjoukon: $\|A\| = \|B\|$. Lauseet A ja B ovat *yhteensopimattomia*, jos $\|A\| \cap \|B\| = \emptyset$, ja *yhteensopivia*, jos $\|A\| \cap \|B\| \neq \emptyset$.

Usein joukko-opin alkeisesityksissä todistetaan ensin lauselogiikan periaatteita ja sitten niiden avulla joukko-opin periaatteita. Kun määrittelemme logiikan käsitteitä tässä esitetyllä tavalla joukko-opin avulla, niin voimme joukko-opin periaatteiden avulla todistaa logiikkaa koskevia väitteitä. Tällöin on vain huolehdittava siitä, että joukko-opin väitteet on todistettu muulla tavoin kuin suoraan vetoamalla formaalin logiikan periaatteisiin.

Esimerkki 18. Oletamme tunnetuksi sen, että leikkaus on vaihdannainen eli aina, kun X ja Y ovat joukkoja, niin $X \cap Y = Y \cap X$.

Koska $\|A \wedge B\| = \|A\| \cap \|B\| = \|B\| \cap \|A\| = \|B \wedge A\|$, niin lauseet $A \wedge B$ ja $B \wedge A$ ovat loogisesti ekvivalentteja.

Esimerkki 19. Oletamme tunnetuksi joukko-opin periaatteen $X \cap Y \subseteq X$.

Koska $\|A \wedge B\| = \|A\| \cap \|B\| \subseteq \|A\|$, niin $A \wedge B \vDash A$.

Esimerkki 20. Oletamme tunnetuksi joukko-opin periaatteen $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$.

Koska

$$\begin{aligned}\|\neg(A \vee B)\| &= \overline{\|A \vee B\|} = \overline{\|A\| \cup \|B\|} \\ &= \overline{\|A\|} \cap \overline{\|B\|} = \|\neg A\| \cap \|\neg B\| = \|\neg A \wedge \neg B\|,\end{aligned}$$

niin kaavat $\neg(A \vee B)$ ja $\neg A \wedge \neg B$ ovat loogisesti ekvivalentteja.

Maailmojen konstruoiminen

”Kaikkien mahdollisten maailmojen luokka” on monessakin suhteessa epämääräinen käsite. Kun tarkastellaan jotakin formaalia logiikkaa, kysymykseen tulevat mahdolliset maailmat ja niiden rakenne määritellään täsmällisesti (usein mahdollisia maailmoja kutsutaan tällöin malleiksi). Kun määrittelimme lauselogiikan semanttisia käsitteitä, niin totesimme, että mahdolliset maailmat voidaan kuvailla ilmoittamalla, mitkä atomilauseet ovat niissä tosia, mitkä epätosia. Joukko-oppi antaa mahdollisuuden täsmentää lauselogiikan mallin määritelmää. Voidaan yksinkertaisesti sopia, että lauselogiikan malli M on atomilauseiden joukon osajoukko ja että $M \vDash p_i$, jos ja vain jos $p_i \in M$.

Esimerkki 21. Mallissa $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ ovat tosia kaikki lausemuuttujat, mallissa $\{p_1, p_3, p_5 \ldots\}$ kaikki ne lausemuuttujat, joiden indeksi on pariton, ja mallissa $\emptyset$ ei ole yksikään lausemuuttuja tosi.

Esimerkki 22. Lause $p_1 \vee p_2 \vee p_3$ on tosi mallissa M, jos ja vain jos $p_1 \in M$, $p_2 \in M$ tai $p_3 \in M$.

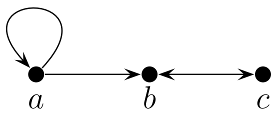
Lause $p_1 \wedge \neg p_2$ on tosi mallissa M, jos ja vain jos $p_1 \in M$ ja $p_2 \notin M$.

4 Relaatiot

Joukossa X määritelty kaksipaikkainen relaatio on mikä tahansa tulojoukon $X \times X$ osajoukko. Yleisesti jos $R \subseteq X^n$, niin sanomme, että R on n-paikkainen relaatio joukossa X. Yleisemmin voimme puhua kaksipaikkaisesta relaatiosta $R \subseteq A \times B$ (joka on tosin myös kaksipaikkainen relaatio joukossa X, kun valitaan $X = A \cup B$) ja n-paikkaisesta relaatiosta $R \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_n$.

Olkoon R kaksipaikkainen relaatio. Jos $\langle a, b\rangle \in R$, niin voidaan merkitä $R(a, b)$ (vastaavaa merkintää käytetään myös useampipaikkaisten relaatioiden yhteydessä) tai aRb. Viimeksi mainittu merkintätapa on käytetyin. Kirjallisuudessa käytetään joskus myös merkintää Rab. Jos $\langle a, b\rangle \notin R$, niin voidaan merkitä $a\not R b$.

Relaatioita voidaan havainnollistaa alla olevan kaltaisella digfaafilla.

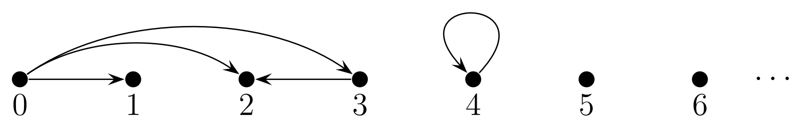


aRa	$b \not R b$
aRb	bRc
$b \not R a$	cRb

Relaatio on siis joukko, jonka alkioina on järjestettyjä pareja. Annamme ensiksi esimerkkejä relaatioista ja tarkastelemme sen jälkeen relaation käsitettä logiikan näkökulmasta, sitten käänteis- ja yhdistettyä relaatiota ja lopuksi eräitä tärkeitä relaation ominaisuuksia.[5]

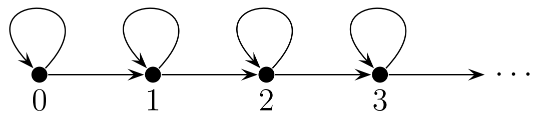
Esimerkki 23. Kaksipaikkaisia relaatioita joukossa $\mathbb{N}$ ovat mm.

$$R_1 = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 0, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 4, 4\rangle\}.$$



[5]Esityksemme pohjautuu (osan tekstistä ollessa suoraa lainausta) oppikirjaan Merikoski, Virtanen, Koivisto: Diskreetti matematiikka I, 2000, ss. 101-102. Siitä on tekeillä uudistettu painos, jonka nimeksi tulee *Johdatus diskreettiin matematiikkaan.*

$$R_2 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \ldots\} =$$
$$\{\, \langle x,y\rangle \mid x,y \in \mathbb{N},\ y = x \text{ tai } y = x+1 \,\}.$$

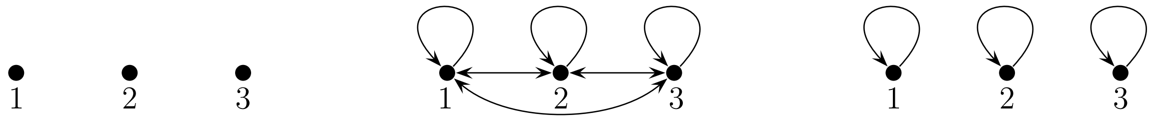


Esimerkki 24. Kaikkein yksinkertaisimmat relaatiot joukossa X ovat tyhjä relaatio $\emptyset$ (mitkään alkiot eivät ole relaatiossa keskenään) ja *universaalinen relaatio* $X \times X$ (kaikki alkiot ovat relaatiossa ovat keskenään).

Joukossa X määriteltyä relaatiota $I = \{\, (x,x) \mid x \in X \,\}$ kutsumme joukon X *identtiseksi relaatioksi*. Identtisessä relaatiossa kukin alkio on relaatiossa itsensä kanssa eikä ole relaatiossa minkään muun alkion kanssa.

Oheinen kuvio havainnollistaa näitä relaatioita tapauksessa $X = \{1,2,3\}$:

Tyhjä relaatio — Universaalinen relaatio — Identtinen relaatio



Esimerkki 25. Olkoon

$$R = \{\, \langle x,y\rangle \mid x,y \in \mathbb{N} \text{ ja } x \text{ suurempi kuin } y \,\}.$$

Tällöin siis esimerkiksi $\langle 1,0\rangle \in R$, joten voimme kirjoittaa $R(1,0)$ tai $1R0$. Relaatiolle R on olemassa oma merkkinsä, nimittäin $>$ (tätä samaa "suurempi kuin" -relaation merkintää käytetään eri perusjoukkojen yhteydessä) ja merkintätapa $1 > 0$ lienee lukijalle tuttu.

Olkoon perusjoukkona jollain täsmällisellä tavalla määritelty ihmisjoukko, vaikkapa Tampereella kirjoilla 1.1.2003 olleet ihmiset. Tässä joukossa voidaan määritellä varsin luontevalla tavalla useita relaatioita, kuten esimerkiksi

$$R_1\colon xR_1y \Leftrightarrow x \text{ ja } y \text{ ovat naimisissa keskenään,}$$
$$R_2\colon xR_2y \Leftrightarrow x \text{ ja } y \text{ ovat sukulaisia,}$$
$$R_3\colon xR_3y \Leftrightarrow x \text{ on } y\text{:n lapsi,}$$
$$R_4\colon xR_4y \Leftrightarrow x \text{ on samanikäinen } y\text{:n kanssa,}$$
$$R_5\colon xR_5y \Leftrightarrow x \text{ on pitempi kuin } y.$$

Puhumme jatkossa tällaisista relaatioista. Oletamme, että jotenkin on sovittu näitä relaatioita vastaavien käsitteiden käytöstä niin, että kenestä tahansa kahdesta tamperelaisesta voidaan sanoa, onko kyseinen relaatio voimassa heidän välillään vai ei (tällöin on otettava huomioon myös järjestys). Kaikki nämä relaatiot R_i voitaisiin siis esittää listaamalla ne "tamperelaisparit" $\langle x,y\rangle$, joissa x on relaatiossa R_i y:n kanssa.

4.1 Relaatiot logiikassa

Predikaattilogiikan mallit ovat struktuureita, joissa esiintyy erilaisia relaatioita. Olkoon L predikaattilogiikan kieli, jonka aakkostoon kuuluu kaksipaikkainen predikaattisymboli Q. Kielen L mallissa $\langle X, V \rangle$ predikaattisymboli Q tulkitaan perusjoukon (universumin) X kaksipaikkaiseksi relaatioksi $V(Q) \subseteq X \times X$.

Esimerkki 26. Muodostukoon kieli L pelkästään kaksipaikkaisesta predikaattisymbolista Q. Kielen L malleja ovat mm. $\langle \{1,2,3\}, V_1 \rangle$ ja $\langle \{1,2,3\}, V_2 \rangle$, missä

$$V_1(Q) = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 3,2 \rangle\}$$

ja

$$V_2(Q) = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle\}.$$

Tarkastelemme jatkossa relaatioiden ominaisuuksien esittämistä predikaattilogiikan kielessä. Kun meillä on annettu jokin formaali kieli ja säännöt siitä, millaisissa struktuureissa (malleissa, kehyksissä yms.) ja miten se tulkitaan, niin sanomme yleisesti, että tämän formaalin kielen kaava A ilmaisee ominaisuuden P, jos kaikissa tulkinnoissa, joissa A on tosi, tulkinnassa esiintyvällä struktuurilla on ominaisuus P.

Esimerkki 27. Olkoon kieli $L = \{Q\}$, jossa Q on kaksipaikkainen predikaattisymboli. Tarkastellaan lausetta $A = \forall x\, Q(x,x)$. Jokaisessa kielen L mallissa $\langle X, V \rangle$, jossa lause A on tosi, Q:n tulkinta $V(Q) = R$ toteuttaa ehdon

$$xRx \text{ aina, kun } x \in X.$$

Tätä relaation ominaisuutta, että jokainen perusjoukon alkio on relaatiossa itsensä kanssa, kutsutaan *refleksiivisyydeksi*. Voimme sanoa, että lause A ilmaisee refleksiivisyyden.

4.2 Käänteisrelaatio ja yhdistetty relaatio

Relaation R *käänteisrelaatio* R^{-1} on relaatio, jonka lakina on

$$yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy.$$

Esimerkki 28. Olkoon

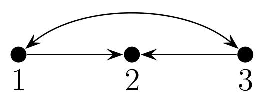
$$R = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle\}.$$

Tällöin

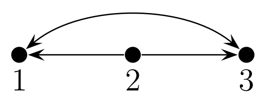
$$R^{-1} = \{\langle 2,1 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,3 \rangle\}.$$

Relaatiota R esittävästä digraafista saadaan relaatiota R^{-1} esittävä digraafi vaihtamalla nuolten kulkusuunnat:

relaatio R



relaatio R^{-1}



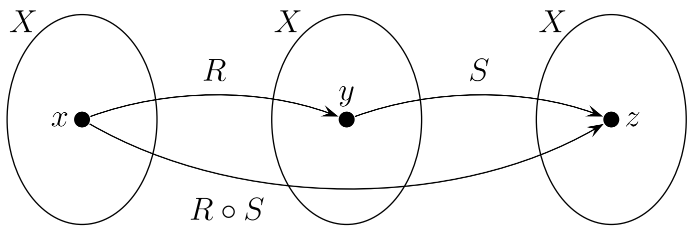
Esimerkki 29. Edellä luonnehditussa tamperelaisten joukossa määriteltyjä relaatioita ja niiden käänteisrelaatioita:

xRy	$yR^{-1}x$
x on y:n lapsi	y on x:n isä tai äiti
x on vanhempi kuin y	y on nuorempi kuin x
x on naimissa y:n kanssa	y on naimissa x:n kanssa

Seuraavaksi tarkastelemme kahta joukossa X määriteltyä relaatiota R ja S (sallitaan myös, että $R = S$). Näiden relaatioiden *yhdistetty relaatio* $R \circ S$ on relaatio, jonka laki on

$$x(R \circ S)z \Leftrightarrow \exists y \in X : xRy \text{ ja } ySz.$$

Jos digraafiin on piirretty sekä relaatiota R että relaatiota S esittävät nuolet, niin alkiot x ja z ovat siis keskenään relaatiossa $R \circ S$, jos ja vain jos nuolikuviossa alkiosta x päästään relaatiota R esittävää nuolta pitkin johonkin alkioon, josta edelleen päästään relaatiota S esittävää nuolta pitkin alkioon z. Jos $R = S$, niin $x(R \circ R)z$, jos vain x:stä päästään täsmälleen kahta nuolta "käyttämällä" y:hyn.



Koska $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$, voimme useampia relaatioita yhdistettäessä jättää sulut pois ja merkitä yksinkertaisesti $R \circ S \circ T$ (ja vastaavasti yleisesti $R_1 \circ R_2 \circ \cdots \circ R_n$). Mikäli R on joukossa X määritelty relaatio, merkitsemme $R^n = R \circ \cdots \circ R$ (n kpl). Relaation R digraafissa alkiosta x päästään alkioon y reitillä, jossa on n nuolta, jos ja vain jos xR^ny.

Esimerkki 30. Olkoon

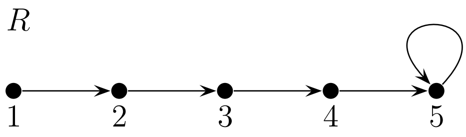
$$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 5,5\rangle\}.$$

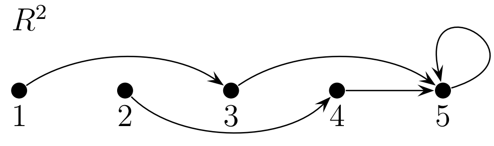
Tällöin

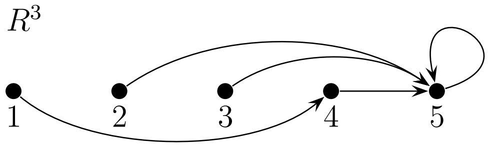
$$R^2 = R \circ R = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 5,5\rangle\},$$
$$R^3 = \{\langle 1,4\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 5,5\rangle\}$$

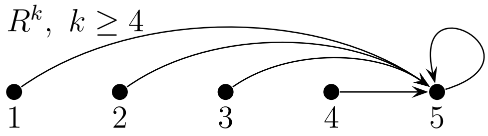
ja

$$R^k = \{\langle 1,5\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 5,5\rangle\}, \quad k = 4,5,6\ldots$$









Esimerkki 31. Tamperelaisten joukossa määriteltyjä relaatioita ja niistä muodostettuja yhdistettyjä relaatioita:

xRy	$x(R \circ R)z$
x on y:n lapsi	x on z:n lapsenlapsi
x on vanhempi kuin y	x on vanhempi kuin z
x on y:tä vuoden vanhempi	x on z:taa kaksi vuotta vanhempi
x on naimissa y:n kanssa	x on sama henkilö kuin z

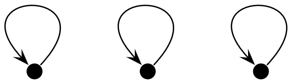
4.3 Relaation ominaisuuksia

Olkoon R on joukossa X määritelty relaatio. Sanomme, että R on

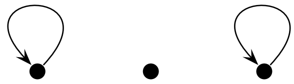
- *refleksiivinen*, jos jokainen $x \in X$ on relaatiossa itsensä kanssa
- *irrefleksiivinen*, jos mikään $x \in X$ ei ole relaatiossa itsensä kanssa
- *symmetrinen*, jos aina kun xRy, niin myös kääntäen yRx
- *antisymmetrinen*, jos xRy ja yRx, niin $x = y$ (jos siis R on antisymmetrinen, xRy ja $y \neq x$, niin $y \not R x$)
- *transitiivinen*, jos aina, kun xRy ja yRz, niin xRz
- *vertailullinen*, jos aina, kun $x, y \in X$, niin xRy tai yRx (vertailullinen relaatio on siis aina refleksiivinen)
- *euklidinen*, jos aina, kun xRy ja xRz, niin myös yRz (ja siis myös zRy, yRy ja zRz)
- *seriaalinen*, jos aina, kun $x \in X$, niin on olemassa sellainen $y \in X$, että xRy.

Näitä relaation ominaisuuksia vastaa digraafissa seuraavat ominaisuudet:

- *Refleksiivisyys*: luuppi jokaisessa solmussa.

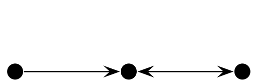


refleksiivinen

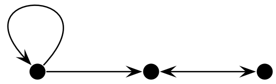


ei refleksiivinen

- *Irrefleksiivisyys*: ei luuppeja.

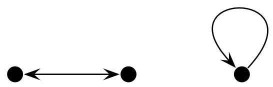


irrefleksiivinen

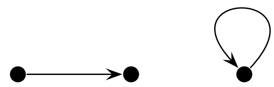


ei irrefleksiivinen

- *Symmetrisyys*: vain kaksoisnuolia ja mahdollisesti luuppeja.

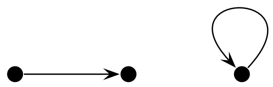


symmetrinen

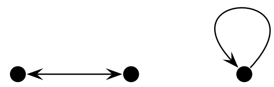


ei symmetrinen

- *Antisymmetrisyys*: ei ollenkaan kaksoisnuolia, luupit sallittuja.

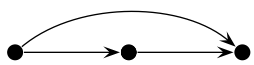


antisymmetrinen

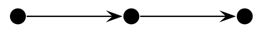


ei antisymmetrinen

- *Transitiivisuus*: Ei ole sellaista kolmea solmua, että ensimmäiestä menee nuoli toiseen ja toisesta kolmanteen, mutta ensimmäisestä ei mene kolmanteen. Lisäksi jos on kaksoisnuolia, niin kummassakin päätepisteessä on luuppi.

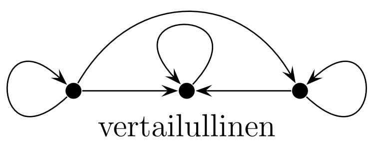


transitiivinen

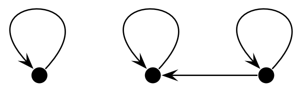


ei transitiivinen

- *Vertailullisuus*: valitaanpa mitkä tahansa kaksi solmua, niin niiden välillä on nuoli ainakin toiseen suuntaan ja lisäksi jokaisessa solmussa luuppi.

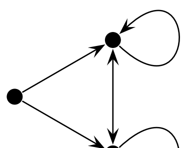


vertailullinen

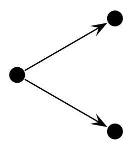


ei vertailullinen

- *Euklidisuus*: Aina, kun jostain solmusta menee nuoli kahteen muuhun, näiden kahden välillä on kaksoisnuoli. Lisäksi niiden solmujen kohdalla, joihin tulee nuoli, on luuppi.

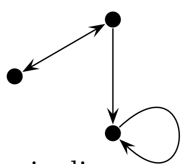


euklidinen

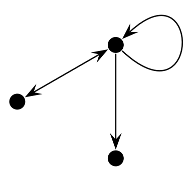


ei euklidinen

- *Seriaalisuus*: Jokaisesta solmusta lähtee nuoli.



seriaalinen



ei seriaalinen

Esimerkki 32. Joukossa $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ määritelty relaatio

$$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,4\rangle\}$$

ei ole

- refleksiivinen, sillä $1 \not R 1$
- irrefleksiivinen, sillä $4R4$
- symmetrinen, sillä $1R2$, mutta $2 \not R 1$
- antisymmetrinen, sillä $2R3$ ja $3R2$
- transitiivinen, sillä $1R2$ ja $2R3$, mutta $1 \not R 3$
- vertailullinen, sillä $3 \not R 4$ ja $4 \not R 3$
- euklidinen, sillä $3R2$ ja $3R1$, mutta $2 \not R 1$ (vaihtoehtoinen perustelu: $3R2$ ja $3R2$, mutta $2 \not R 2$)
- seriaalinen, sillä ei ole olemassa sellaista alkiota y, että $5Ry$.

Kaikki tässä luetellut relaation ominaisuudet voidaan ilmaista predikaattilogiikassa:[6]

- *refleksiivisyys*: $\forall x R(x, x)$
- *irrefleksiivisyys*: $\forall x \neg R(x, x)$
- *symmetrisyys*: $\forall x \forall y \big(R(x, y) \to R(y, x)\big)$
- *antisymmetrisyys*: $\forall x \forall y \big(R(x, y) \wedge R(y, x) \to x = y\big)$
- *transitiivisuus*: $\forall x \forall y \forall z \big(R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z)\big)$
- *vertailullisuus*: $\forall x \forall y \big(R(x, y) \vee R(y, x)\big)$
- *euklidisuus*: $\forall x \forall y \forall z \big(R(x, y) \wedge R(x, z) \to R(y, z)\big)$
- *seriaalisuus*: $\forall x \exists y R(x, y)$.

Kun relaatio R on symmetrinen, alkioiden järjestyksellä ei ole merkitystä, ja voimme käyttää ilmausta "(x ja y) ovat relaatiossa R (keskenään)".

Esimerkki 33. Lukujen yhtäsuuruus '=' on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen relaatio: Jokainen luku on itsensä kanssa yhtäsuuri; jos x on yhtäsuuri y:n kanssa, niin myös y on yhtäsuuri x:n kanssa; jos sekä luvut x ja y että y ja z ovat yhtäsuuret, niin myös luvut x ja z ovat yhtäsuuret.

[6] Käytämme samaa merkintää R sekä logiikan kielen kaksipaikkaiselle predikaattisymbolille että kaksipaikkaiselle relaatiolle, joka on siis järjestettyjen parien joukko.

Esimerkki 34. Osajoukkorelaatio on refleksiivinen, transitiivinen ja antisymmetrinen. Aito osajoukko -relaatio on irrefleksiivinen, transitiivinen ja (triviaalisti) antisymmetrinen.

Esimerkki 35. Kahden lauseen välinen looginen seuraus -relaatio (siis A ja B ovat tässä relaatiossa, jos $A \vDash B$) on refleksiivinen ja transitiivinen, muttei symmetrinen eikä antisymmetrinen.

Esimerkki 36. Relaatio 'syntyneet samana päivänä' on refleksiivinen ja relaatio 'syntyneet eri päivinä' on irrefleksiivinen. Kumpikin relaatio on symmetrinen.

Esimerkki 37. Relaatio 'x:llä on sama sukunimi kuin y:llä vuosi aikaisemmin' ei ole refleksiivinen eikä irrefleksiivinen. Se ei ole myöskään symmetrinen.

Esimerkki 38. Relaatio 'ovat naimisissa (keskenään)' on symmetrinen, relaatio 'x haluaa olla naimisissa y:n kanssa' ei (todennäköisesti) ole symmetrinen eikä antisymmetrinen, relaatiot 'x on vanhempi kuin y' ja 'x on y:n lapsi' ovat antisymmetrisiä.

Esimerkki 39. Relaatiot 'x on nuorempi kuin y' ja 'yhtä vanhat' ovat transitiivisia, relaatiot 'sukulaiset' ja 'x ihailee y:tä' eivät ole transitiivisia (tarpeeksi pienessä perusjoukossa ne voisivat kyllä sattumalta olla transitiivisia).

Esimerkki 40. Relaatio 'x on nuorempi tai samanikäinen kuin y' on vertailullinen, relaatiot 'x on nuorempi kuin y' ja 'yhtä vanhat' eivät ole vertailullisia.

Esimerkki 41. Relaatiot 'yhdensuuntaiset suorat (euklidisessa avaruudessa)' ja 'samanikäiset' ovat euklidisia, mutta relaatiot 'serkukset' ja 'olleet samalla logiikan kurssilla' eivät ole.

Esimerkki 42. Relaatio 'x on y:n lapsi' on seriaalinen, sillä jokainen on jonkun lapsi, mutta relaatio 'x on y:n vanhempi' ei ole seriaalinen, sillä jokaisella ei ole lapsia.

4.4 Ekvivalenssirelaatio

Matematiikassa ja myös sen ulkopuolella joudutaan usein tekemisiin sellaisten relaatioiden R kanssa, jotka ovat tyyppiä "xRy, jos x:llä ja y:llä on tietty sama ominaisuus". Tällaisen ominaisuuden avulla voidaan alkiot jakaa "luokkiin" niin, että kaikki alkiot, joilla on sama ominaisuus, kuuluvat samaan luokkaan. Nämä tarkastelut saadaan täsmällisiksi käyttämällä ekvivalenssirelaation käsitettä.

> Relaatio on *ekvivalenssirelaatio* tai lyhemmin *ekvivalenssi*, jos se on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen.

Ekvivalenssirelaatiota merkitään usein symbolilla $\sim$ (lue: "mato"). Mikäli kaksi alkiota ovat keskenään ekvivalenssirelaatiossa, sanomme, että nämä alkiot ovat keskenään *ekvivalentteja.*

Esimerkki 43. Kaikkein yksinkertaisin ekvivalenssirelaatio on alkioiden samuus

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y.$$

Alkioiden eroavuus

$$x \sim y \Leftrightarrow x \neq y$$

ei sen sijaan ole ekvivalenssi, sillä se ei ole refleksiivinen (eikä myöskään transitiivinen).

Esimerkki 44. Looginen ekvivalenttisuus lauselogiikassa (ja yleensäkin) on ekvivalenssirelaatio. Kun nimittäin A, B ja C ovat mielivaltaisia kaavoja, niin

- $A \leftrightarrow A$ on tautologia
- jos $A \leftrightarrow B$ on tautologia, myös $B \leftrightarrow A$ on tautologia
- jos $A \leftrightarrow B$ ja $B \leftrightarrow C$ ovat tautologioita, myös $A \leftrightarrow C$ on tautologia.

Esimerkki 45. Relaatiot 'syntyneet samana päivänä', 'syntyneet samalla paikkakunnalla', 'yhtä vanhat', 'yhtä pitkät', 'asuvat vakituisesti samassa kaupunginosassa', 'asuvat vakituisesti samassa asunnossa', 'omaavat saman äidinkielen', 'ovat samaa sukupuolta' ja 'yhdensuuntaiset suorat' ovat ekvivalensseja. Relaatio 'saman maan kansalaiset' ei ole ekvivalenssi, kun sallitaan kaksoiskansalaisuus.

Olkoon $\sim$ joukossa X määritelty ekvivalenssi ja $a \in X$. Tarkastellaan joukkoa

$$[a] = \{\, x \in X \mid x \sim a \,\},$$

jota kutsutaan alkion a määräämäksi *ekvivalenssiluokaksi*. Se on siis kaikkien niiden alkioiden joukko, jotka ovat a:n kanssa ekvivalentteja. Ekvivalenssin refleksiivisyydestä seuraa, että $a \in [a]$.

Esimerkki 46. Joukossa $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ määritelty relaatio $\sim$

$$= \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 5,4\rangle\}$$

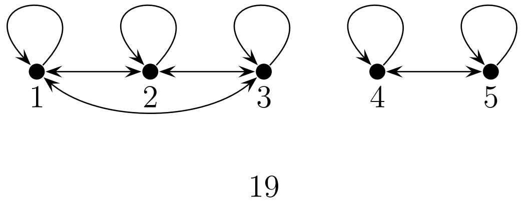
on ekvivalenssi. Alkion 1 määräämä ekvivalenssiluokka

$$[1] = \{\, x \in X \mid x \sim 1 \,\} = \{1, 2, 3\}$$

ja vastaavasti

$$[2] = [3] = \{1, 2, 3\}, \ [4] = [5] = \{4, 5\}.$$

Ekvivalenssiluokkia on siis kaksi: $\{1, 2, 3\}$ ja $\{4, 5\}$. Digraafissa ekvivalenssiluokat erottuvat erillisiksi "saarekkeiksi", ja kussakin saarekkeessa nuoli kulkee jokaisesta pisteestä jokaiseen muuhun pisteeseen.



Tässä esimerkissä samoin kuin yleisesti ekvivalenssiluokat muodostuvat keskenään ekvivalenteista alkioista siten, että kukin alkio kuuluu täsmälleen yhteen ekvivalenssiluokkaan. Kaksi alkiota kuuluvat samaan ekvivalenssiluokkaan täsmälleen silloin, kun alkiot ovat keskenään ekvivalentteja.

Esimerkki 47. Olkoon X jonkin tamperelaisen peruskoulun oppilaiden joukko. Relaatio

$$x \sim_1 y \Leftrightarrow x \text{ ja } y \text{ ovat samalla luokalla}$$

on ekvivalenssi, ja ekvivalenssiluokat muodostuvat koululuokista. Myös relaatio

$$x \sim_2 y \Leftrightarrow x \text{ ja } y \text{ ovat samaa sukupuolta}$$

on ekvivalenssirelaatio, ja nyt ekvivalenssiluokkia on kaksi: toisen muodostavat koulun pojat ja toisen tytöt.

4.5 Järjestysrelaatio

Ekvivalenssirelaatio on siis käsitteen ”liittyy tietty sama ominaisuus” abstraktio. Toinen matematiikassa ja muuallakin esiin tuleva keskeinen relaatioon johtava käsite syntyy suoritettaessa vertailuja järjestyksen perusteella. Ryhdymme nyt abstrahoimaan käsitettä ”pienempi kuin”, ”vähemmän kuin”, ”ennen kuin” yms. Tutkimme näitä käsitteitä muodossa ”pienempi tai yhtäsuuri kuin”, ”vähemmän tai yhtä paljon kuin”, ”sama tai ennen kuin” yms. Sanomme, että

> relaatio on *järjestysrelaatio* eli lyhemmin *järjestys*, jos se on refleksiivinen, antisymmetrinen, transitiivinen ja vertailullinen.

Järjestysrelaatiota merkitään usein symbolilla $\preceq$ (lue: ”edeltää tai on sama”). Refleksiivisyys tarkoittaa, että kukin alkio edeltää itseään, antisymmetrisyys tarkoittaa, etteivät kaksi eri alkiota voi molemmat edeltää toisiaan, ja transitiivisuus merkitsee, että edeltävyys on ”periytyvää”: jos alkio edeltää jotakin toista alkiota, niin se edeltää myös kaikkia alkioita, joita tämä toinen alkio edeltää. Vertailullisuudesta seuraa, että jokaisesta kahdesta alkiosta voidaan sanoa, kumpi edeltää toista.

Esimerkki 48. Luonnollisten lukujen joukossa relaatiot R_1, $xR_1y \Leftrightarrow x \leq y$, ja R_2, $xR_2y \Leftrightarrow x \geq y$, ovat järjestysrelaatioita.

Esimerkki 49. Luonnollisten lukujen joukossa relaatiot R_1, $xR_1y \Leftrightarrow x < y$, ja R_2, $xR_2y \Leftrightarrow x > y$, eivät ole tässä esitetyn (ja yleisesti käytetyn) määritelmän mukaan järjestyksiä, sillä ne eivät ole refleksiivisiä. Tällaiselle transitiiviselle ja antisymmetriselle relaatiolle käytetään nimityksiä ”aito(!) järjestys”, ”tiukka järjestys” tms.

Jos relaatio R on transitiivinen, antisymmetrinen ja vertailullinen siinä mielessä, että kahta erisuurta alkiota voidaan aina verrata keskenään, niin relaatio ’xRy tai $x = y$’ on aina järjestys. Refleksiivisyys ei näin ollen ole erityisen oleellinen piirre järjestysrelaation määritelmässä, vaan kysymys on lähinnä sopimuksesta.

Esimerkki 50. Pankin asiakkaille annettava jonotusnumero asettaa jonottajat ”aitoon järjestykseen” palvelun saamisen ajankohdan suhteen ehdon

> x saa palvelua ennen y:tä, jos ja vain jos x:n jonotusnumero on pienempi kuin y:n

mukaisesti.

Relaatiota, joka on refleksiivinen, antisymmetrinen ja transitiivinen, muttei välttämättä vertailullinen, sanomme *osittaiseksi järjestykseksi*. Tällöin itse järjestysrelaatiota sanotaan usein *täydelliseksi järjestykseksi*.

Esimerkki 51. Luonnollisten lukujen potenssijoukossa $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ määritelty osajoukkorelaatio $\subseteq$ on osittainen, muttei täydellinen järjestys. Nimittäin kaikille joukoille A, B ja C pätee, että

$$\begin{aligned}
&A \subseteq A, \\
&A \subseteq B \text{ ja } B \subseteq A \Rightarrow A = B, \\
&A \subseteq B \text{ ja } B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C
\end{aligned}$$

ja toisaalta esimerkiksi $\{1\} \nsubseteq \{2\}$ ja $\{2\} \nsubseteq \{1\}$.

Olkoon X jokin sopiva perusjoukko olioita, esineitä, asioita tms., joita jokin henkilö a vertailee keskenään, ja olkoot $Q, P, I \subseteq X \times X$ relaatioita, joiden intuitiiviset merkitykset ovat seuraavat:

$$\begin{aligned}
xQy &\Leftrightarrow a\text{:n mielestä } x \text{ on vähintään yhtä hyvä kuin } y, \\
xPy &\Leftrightarrow a\text{:n mielestä } x \text{ on parempi kuin } y, \\
xIy &\Leftrightarrow a\text{:n mielestä } x \text{ ja } y \text{ ovat yhtä hyviä.}
\end{aligned}$$

Relaatiota Q kutsutaan *heikoksi preferenssiksi*, relaatiota P *vahvaksi preferenssiksi* ja relaatiota I *indifferenssirelaatioksi*.

Jos nyt oletetaan, että henkilön a arvostukset ovat rationaalisia, niin voidaan edellyttää heikon preferenssin olevan transitiivinen ja refleksiivinen, vahvan preferenssin olevan transitiivinen ja irrefleksiivinen ja indifferenssirelaation olevan ekvivalenssirelaatio. Heikko preferenssi ei kuitenkaan ole (osittainen) järjestys, sillä se ei ole antisymmetrinen. Antisymmetrisyyden sijasta heikko preferenssi toteuttaa ehdon xQy ja $yQx \Rightarrow xIy$.[7]

Itse asiassa suurin osa relaatioista, joilla vertaillaan ominaisuuksien määrää, on tällaista tyyppiä, ei niinkään varsinaisia järjestyksiä. Kaksi eri henkilöä voivat nimittäin olla yhtä pitkiä, samanikäisiä, suorittaneet yhtä monta opintoviikkoa, saaneet saman arvosanan logiikan peruskurssilta, ottaneet yhtä paljon opintolainaa jne.

[7] Relaation Q avulla voidaankin muodostaa järjestys ekvivalenssirelaation I määräämien ekvivalenssiluokkien välille: Olkoon $[x] = \{\, z \mid xIz \,\}$ ja $[y]$ vastaavasti alkion y määräämä ekvivalenssiluokka. Määritellään, että $[x] \preceq [y]$, jos xQy. Huomaa, että tässä xQy, jos ja vain jos $x'Qy'$ aina, kun $x'Ix$ ja $y'Iy$. Näin muodostettu relaatio $\preceq$ on järjestys ekvivalenssiluokkien joukossa.

Esimerkki 52. Olkoon P relaatio 'x on syntynyt aikaisemmin (päivän tarkkuudella) kuin y', I relaatio 'syntyneet samana päivä' ja Q relaatio 'x on syntynyt aikaisemmin tai samana päivänä kuin y'. Tällöin relaatio P on transitiivinen ja irrefleksiivinen, relaatio I ekvivalenssi ja relaatio Q transitiivinen ja refleksiivinen (muttei antisymmetrinen).

Relaatiot Q ja I toteuttavat ehdon

$$xQy \text{ ja } yQx \Rightarrow xIy,$$

sillä jos x on syntynyt aikaisemmin tai samana päivänä kuin y ja myös y on syntynyt aikaisemmin tai samana päivänä kuin x, niin x ja y ovat syntyneet samana päivänä.

5 Kuvaus eli funktio

Intuitiivisesti *kuvausta* eli *funktiota* voi luonnehtia sanomalla, että kyseessä on struktuuri $\langle A, B, F\rangle$, jossa A ja B ovat joukkoja ja F on sääntö, jonka avulla on mahdollista liittää *jokaiseen* joukon A alkioon *yksikäsitteinen* joukon B alkio. Joukkoa A kutsutaan kuvauksen *lähtöjoukoksi* (puhutaan myös *määrittelyjoukosta*) ja joukkoa B *maalijoukoksi*.

Esimerkki 53. Tarkastellaan kuvausta $f = \langle \mathbb{N}, \mathbb{N}, \text{'kerrotaan annettu luku kahdella ja lisätään tuloon luku 1'}\rangle$. Tällöin siis f liittää lukuun 0 luvun 1, lukuun 1 luvun 3 ja yleisesti lukuun n luvun $2n + 1$.

Edellä oleva intuitiivinen määritelmä riittää tämän liitteen tarkasteluissa, mutta muodollisesti kuvaus joukolta A joukkoon B määritellään relaatioksi $R \subseteq A \times B$, joka toteuttaa ehdot

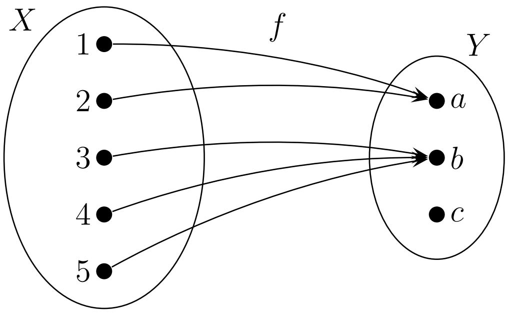
$$\forall x \in A\colon \exists y \in B\colon xRy,$$
$$xRy_1 \text{ ja } xRy_2 \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Ensimmäinen ehto ilmaisee, että kuvaus on määritelty jokaiselle lähtöjoukon alkiolle,[8] ja toinen ehto ilmaisee, että kuvauksen arvo on yksikäsitteinen. Jos relaatio $f \subseteq A \times B$ on kuvaus, niin merkitään $f\colon A \to B$ ja merkinnän $\langle x, y\rangle \in f$ sijasta yleensä käytetään merkintää $f(x) = y$ ja sanotaan, että y on x:n *kuva* ja että x on y:n *alkukuva*.

Relaatiota $R \subseteq A \times B$ voi havainnollistaa nuolikuviolla, jossa vasemmalla on joukon A alkiot ja oikealle joukon B alkiot ja jossa piirretään nuoli joukon A alkioista niihin joukon B alkioihin, joiden kanssa ne ovat relaatiossa R. Kun kyseessä on kuvaus, niin jokaisesta määrittelyjoukon A alkiosta lähtee täsmälleen yksi nuoli maalijoukkoon B.

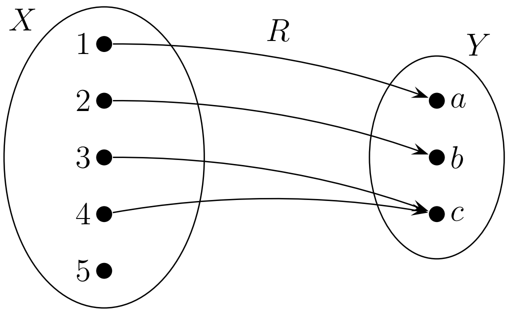
Esimerkki 54. Alla oleva nuolikuvio havainnollistaa kuvausta $f\colon \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{a, b, c\}$, $f(1) = f(2) = a$, $f(3) = f(4) = f(5) = b$.

[8] Jos $A = B$, niin relaatio R on siis seriaalinen, jos se on kuvaus.



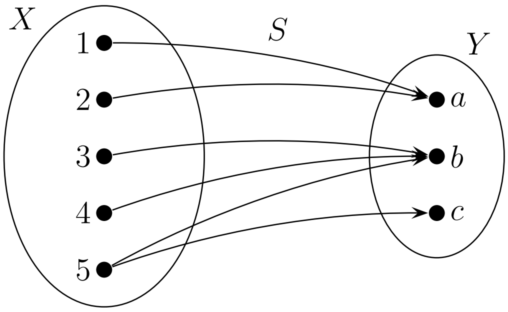
Jokaisella määrittelyjoukon alkiolla on täsmälleen yksi kuva, joten f on kuvaus.

Seuraavat kaksi nuolikuviota esittävät relaatioita, jotka eivät ole kuvauksia. $R = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, c\rangle \langle 4, c\rangle\}$:



Relaatio R ei ole kuvaus, sillä alkiolla 5 ei ole kuvaa.

$S = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, b\rangle, \langle 4, b\rangle, \langle 5, b\rangle, \langle 5, c\rangle\}$:



Relaatio S ei ole kuvaus, sillä alkion 5 "kuva" ei ole yksikäsitteinen.

Yksikäsitteisesti määritellystä relaatiosta voidaan aina muodostaa vastaava kuvaus valitsemalla määrittelyjoukko sopivasti. Kun jotain relaatiota kutsutaan kuvaukseksi, mutta ei mainita sen määrittelyjoukkoa, niin ajatellaan tämä määrittelyjoukko valituksi sopivasti, jotta kyseessä todella on kuvaus.

Esimerkki 55. Olkoon $R_1 = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$. Tällöin R_1 on kuvaus joukolta $\{0, 1, 2\}$ joukkoon $\{0, 1, 2, 3\}$, mutta ei ole kuvaus joukolta $\{0, 1, 2, 3\}$ joukkoon $\{0, 1, 2, 3\}$, koska ei ole sellaista alkiota y, että $3Ry$. Relaatio $R_2 = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$ ei ole kuvaus, sillä $0R_11$ ja $0R_12$, vaikka $1 \neq 2$.

Todettakoon, että kun kuvaus määritellään tällä tavoin relaatioksi, joka toteuttaa mainitut ehdot, niin kaikkia kuvauksia ei ole mahdollista luonnehtia esittämällä kyseistä kuvausta koskeva sääntö.

Esimerkki 56. Totuustaulujen sijasta lauselogiikan kaavoja voidaan tarkastella käyttämällä totuusjakaumia eli valuaatioita. Totuusjakauma v on kuvaus

$$v\colon \{\, A \mid A \text{ on lauselogiikan kaava} \,\} \to \{t, e\}.$$

Tämän kuvauksen lähtöjoukko on kaikkien lauselogiikan kaavojen joukko, maalijoukko on totuusarvojen muodostama kaksijäseninen joukko. Totuusjakauma liittää jokaiseen kaavaan yksikäsitteisen totuusarvon t tai e. Kun on jollain tavoin määritelty, mitä totuusarvoja lausemuuttujat saavat, niin loput kuvauksen arvoista määräytyvät konnektiiveja vastaavista totuusehdoista. Esimerkiksi negaation totuusehdot vastaavat kuvausta

$$f_\neg\colon \{t, e\} \to \{t, e\},\ f_\neg(t) = e,\ f_\neg(e) = t$$

ja konjunktion totuusehdot kuvausta

$$f_\wedge\colon \{t, e\} \times \{t, e\} \to \{t, e\},\ f_\wedge(t, t) = t,\ f_\wedge(t, e) = f_\wedge(e, t) = f_\wedge(e, e) = e.$$

Jos esimerkiksi $v(p_1) = t$ ja $v(p_2) = e$, niin

$$v(p_1 \wedge \neg p_2) = f_\wedge\big(t, f_\neg(e)\big) = f_\wedge(t, t) = t.$$

Esimerkki 57. Olkoon W mahdollisten maailmojen joukko ja $\mathrm{Prop} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ atomilauseiden joukko. Mahdollisten maailmojen semantiikassa esiintyy relaatio $P \subseteq \mathrm{Prop} \times \mathcal{P}(W)$, joka liittää jokaiseen atomilauseeseen p_i niiden mahdollisten maailmojen joukon, joissa p_i on tosi. Relaatio P on täten kuvaus joukolta Prop potenssijoukkoon $\mathcal{P}(W)$.

Olkoon $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ ja esimerkiksi

$$\langle p_1, \{w_1, w_2\}\rangle \in P,\ \langle p_2, \{w_2, w_3\}\rangle \in P,\ \langle p_3, \{w_1, w_2, w_3\}\rangle \in P.$$

Tällöin siis $P(p_1) = \{w_1, w_2\}$, $P(p_2) = \{w_2, w_3\}$ ja $P(p_3) = \{w_1, w_2, w_3\}$. Tämä tarkoittaa sitä, että esimerkiksi atomilause p_1 on tosi maailmoissa w_1 ja w_2 ja vain niissä.

Esimerkki 58. Tavallinen luonnollisten lukujen yhteenlasku on kuvaus

$$f_+\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f_+(k, m) = k + m.$$

Se voidaan esittää myös kolmipaikkaisena relaationa

$$R = \{\, \langle k, m, n\rangle \mid k + m = n \,\} = \{\langle 0, 0, 0\rangle\ \langle 0, 1, 1\rangle, \ldots, \langle 2, 3, 5\rangle, \ldots\}.$$

Esimerkki 59. Lauselogiikan kielen $\langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathbf{L}_{PL}\rangle$ kaavanmuodostussääntöjä (eli joukon $\mathcal{R}$ alkioita) ovat esimerkiksi yksipaikkainen kuvaus

$$r_\neg\colon \mathbf{L}_{PL} \to \mathbf{L}_{PL},\ r_\neg(A) = \neg A$$

ja kaksipaikkainen kuvaus

$$r_\wedge\colon \mathbf{L}_{PL} \times \mathbf{L}_{PL} \to \mathbf{L}_{PL},\ r_\wedge(A, B) = (A \wedge B).$$

Esimerkki 60. Tässä esimerkissä määrittelyjoukoksi oletetaan tamperelaisten joukko, mutta maalijoukko vaihtelee.

> Käsitteet *(tiettynä ajanhetkenä henkilön) pituus*, *paino*, *nimi*, *henkilötunnus*, *ikä*, *verotuskunta* ja *lasten lukumäärä* ovat kuvauksia.
>
> Relaatio *(henkilön) isoäiti* ei ole kuvaus sillä se ei ole yksikäsitteinen, vaan "arvoja" on kaksi.
>
> Relaatio *(henkilön) aviopuoliso* ei ole kuvaus, koska se ei ole määritelty kaikilla "arvoilla". Jos lisätään mahdolliseksi kuvaksi 'ei naimisissa', saadaan kuvaus.

Esimerkki 61. Relaatio R, missä xRy, jos y on x:n lapsi, ei ole kuvaus yksikäsitteisyyden puuttumisen vuoksi ja myös sen vuoksi, että kaikilla ei ole lapsia. Toisaalta siitä voidaan helposti konstruoida kuvaus r, kun otetaan maalijoukoksi kaikkien lasten joukon potenssijoukko ja määritellään, että $r(x)$ on henkilön x lasten muodostama joukko (myös tyhjä joukko on mahdollinen "arvo").

Yleisesti, kun $R \subseteq X \times X$ on relaatio, niin

$$r\colon X \to \mathcal{P}(X), \; r(x) = \{\, y \mid xRy \,\}$$

on kuvaus.

6 Injektio, surjektio, bijektio

Kuvaus $f\colon X \to Y$ on *injektio*, jos

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

eli

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Kuvaus on siis injektio, jos eri alkiot kuvautuvat eri alkioille eli maalijoukon jokainen alkio on määrittelyjoukon *korkeintaan* yhden alkion kuva.

Esimerkki 62. Kuvaus '(henkilön) ikä' ei ole injektio, koska on useita samanikäisiä henkilöitä. Sama koskee myös kuvausta '(henkilön) nimi', mutta kuvaus '(henkilön) henkilötunnus' on injektio, sillä ei ole olemassa kahta henkilöä, joilla on sama henkilötunnus.

Kuvaus f on *surjektio*, jos

$$\forall y \in Y : \exists x \in X : y = f(x).$$

Kuvaus on siis surjektio, jos sen maalijoukon jokainen alkio on määrittelyjoukon *ainakin* yhden alkion kuva eli kuvauksen f *arvojoukko* $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ on sama kuin maalijoukko Y.

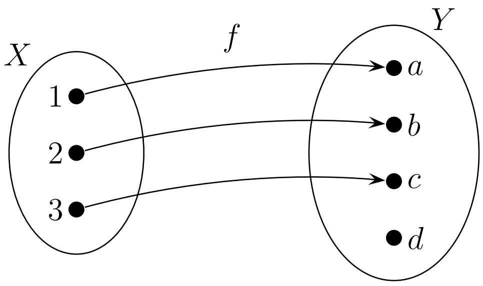
Esimerkki 63. Surjektion yhteydessä on tärkeätä mainita maalijoukko. Kuvaus 'henkilötunnus' ei ole surjektio, jos maalijoukoksi otetaan kaikki merkkijonot, jotka täyttävät henkilötunnukselle asetetut muodolliset vaatimukset, mutta on triviaalisti surjektio, jos maalijoukkona on kaikki käytössä olevat henkilötunnukset.

Kuvaus f on *bijektio*, jos se on sekä injektio että surjektio. Tällöin maalijoukon jokainen alkio on määrittelyjoukon *täsmälleen* yhden alkion kuva.

Esimerkki 64. Kuvaus vaimo: {naimisissa olevat miehet} $\to$ {naimisissa olevat naiset}, $\mathit{vaimo}(x)$ = 'x:n vaimo', on bijektio (jos siis moniavioisuutta ei sallita).

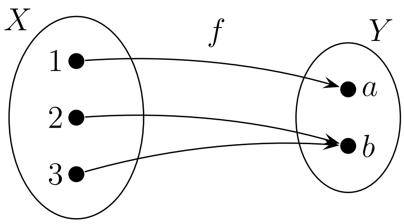
Nuolikuviossa injektiossa jokaiseen maalijoukon alkioon tulee korkeintaan yksi nuoli ja surjektiossa vähintään yksi. Bijektiossa siis jokaiseen maalijoukon alkioon tulee täsmälleen yksi nuoli.

Esimerkki 65. $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$, $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$.



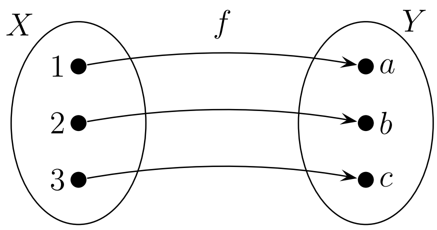
Injektio, ei surjektio

$X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b\}$, $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = b$.



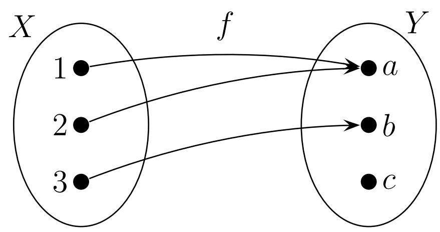
Ei injektio, surjektio

$X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$,



Injektio ja surjektio

$X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $f(1) = a$, $f(2) = a$, $f(3) = b$,



Ei injektio eikä surjektio

7 Numeroituvuus

Olkoot A ja B äärellisiä joukkoja. Jos on olemassa bijektio $f\colon A \to B$, niin kummassakin joukossa on oltava yhtä monta alkiota.

Esimerkki 66. Jos kuvaus $f\colon \{1, 2, 3\} \to A$ on bijektio, niin joukossa A on täsmälleen kolme alkiota. Jos nimittäin alkioita olisi vähemmän kuin kolme, niin pakostakin $f(1) = f(2)$, $f(1) = f(3)$ tai $f(2) = f(3)$, jolloin f ei ole injektio. Jos alkioita olisi enemmän kuin kolme, niin jollain A:n alkiolla a, joka ei kuulu joukkoon $\{f(1), f(2), f(3)\}$, ei ole alkukuvaa ja f ei ole surjektio.

Yleistäen jos $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to A$ on bijektio, niin joukossa A on täsmälleen n alkiota.

Jos tarkastelemme myös äärettömiä joukkoja, niin voimme yleistää käsitteen ”yhtä monta alkiota” määrittelemällä, että joukot A ja B ovat *yhtä mahtavia*, jos on olemassa bijektio $f\colon A \to B$. Äärellisessä tapauksessa käsite ”yhtä mahtava” vastaa intuitiotamme siitä, milloin kahdessa joukossa on yhtä monta alkiota, mutta äärettömissä tapauksissa päädymme myös sellaisiin tuloksiin, että kokonaisuuden osa voi olla ”yhtä suuri” kokonaisuuden kanssa.

Esimerkki 67. Luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ ja positiivisten kokonaislukujen joukko ovat keskenään yhtä mahtavia. Kuvaus $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_+$, $f(n) = n + 1$ on nimittäin bijektio. Vastaavuuden huomaa myös kirjoittamalla nämä joukot allekkain:

$$\begin{aligned}&\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\quad n,\quad \ldots\},\\ &\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ n+1,\ \ldots\}.\end{aligned}$$

Myös luonnollisten lukujen joukko ja parillisten luonnollisten lukujen joukko ovat keskenään yhtä mahtavia:

$$\begin{aligned}&\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots\},\\ &\{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ 2n,\ \ldots\}.\end{aligned}$$

Luonnollisia lukuja on siis määritelmämme mielessä ”yhtä paljon” kuin parillisia luonnollisia lukuja, vaikka vain joka toinen luonnollinen luku on parillinen.

Joukko A on *numeroituva*, jos se äärellinen tai yhtä mahtava luonnollisten lukujen (tai yhtä hyvin positivisten kokonaislukujen) joukon kanssa. Periaatteessa jokaisen äärellisen joukon alkiot voidaan luetella. Jos joukko A on ääretön, mutta numeroituva, niin voimme ajatella silloinkin sen alkioiden olevan lueteltavissa, tosin ”luettelo” ei pääty. Jos nimittäin $f\colon \mathbb{N} \to A$ on bijektio, niin jokainen joukon A alkio esiintyy ennemmin tai myöhemmin luettelossa $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ...

Esimerkki 68. Lausemuuttujien joukko $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ on numeroituva.

Joukko on *ylinumeroituva*, jos se ei ole numeroituva. Voidaan todistaa[9], että reaalilukujen joukko on ylinumeroituva, eikä siis olemassa sellaista (äärettömän pitkää) luetteloa r_1, r_2, r_3, ..., jossa esiintyisi jokainen reaaliluku.

Kaikkien lauselogiikan kaavojen joukko on numeroituva, jos lausemuuttujia (ja konnektiiveja) on numeroituvasti. Tämä voidaan todistaa vastaavalla tavalla kuin todistetaan, että rationaalilukuja on numeroituvasti.[10]

8 Induktio

Kaikkien lauselogiikan kaavojen joukko määritellään induktiivisesti. Myös luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ voidaan luonnehtia induktiivisesti:

> luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ on pienin sellainen joukko, joka toteuttaa ehdot $0 \in \mathbb{N}$ ja $k \in \mathbb{N} \Rightarrow k+1 \in \mathbb{N}$.

Tästä ominaisuudesta seuraa luonnollisia lukuja koskeva induktioperiaate:

> jos luvulla 0 on ominaisuus P ja jos siitä, että luonnollisella luvulla k on ominaisuus P seuraa, että myös luvulla $k+1$ on ominaisuus P, niin kaikilla luonnollisilla luvuilla n on ominaisuus P.

Voimme esittää induktioperiaatteen muodollisemmin seuraavasti:

$$\begin{array}{l} P(0) \\ \forall k \in \mathbb{N}\colon \big(P(k) \to P(k+1)\big) \\ \hline \forall n \in \mathbb{N}\colon P(n). \end{array}$$

Myös logiikassa käytetään induktiotodistuksia. Lauselogiikan kielen induktiivinen määritelmä mahdollistaa kaavoja koskevien väitteiden todistamisen induktiolla kaavan pituuden suhteen. Jos tehtävänä on todistaa, että jokaisella kaavalla A on ominaisuus $\mathcal{O}$ eli

$$\mathcal{O}(A) \text{ aina, kun } A \text{ on kaava,}$$

niin menetellään seuraavasti:

> Osoitetaan ensin, että $\mathcal{O}(p_i)$, kun $i = 1, 2, 3, \ldots$
>
> Tehdään induktio-oletus (lyhenne I.O.), että $\mathcal{O}(B)$ ja $\mathcal{O}(C)$ ja todistetaan induktioaskeleessa, että $\mathcal{O}(\neg B)$, $\mathcal{O}(B \wedge C)$, $\mathcal{O}(B \vee C)$, $\mathcal{O}(B \to C)$ ja $\mathcal{O}(B \leftrightarrow C)$.

[9] Ks. esim. Merikoski, Virtanen, Koivisto, Diskreetti matematiikka I, 2000, ss. 101-102.
[10] Ks. ibid, s. 101.

Esimerkki 69. Määritellään induktiivisesti vasemmanpuoleisten (lp) ja oikeanpuoleisten (rp) sulkujen lukumäärät seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\operatorname{lp} p_i &= \operatorname{rp} p_i = 0,\\
\operatorname{lp} \neg B &= \operatorname{lp} B,\\
\operatorname{rp} \neg B &= \operatorname{rp} B,\\
\operatorname{lp}(B \wedge C) &= \operatorname{lp} B + \operatorname{lp} C + 1,\\
\operatorname{rp}(B \wedge C) &= \operatorname{rp} B + \operatorname{rp} C + 1.
\end{aligned}$$

Todistetaan induktiolla, että aina kun A on kaava, niin

$$(*) \qquad \operatorname{lp} A = \operatorname{rp} A.$$

Kun $A = p_i$, niin $\operatorname{lp} A = 0 = \operatorname{rp} A$, ja väite on voimassa. Oletetaan (induktiooletus), että $\operatorname{lp} B = \operatorname{rp} B$ ja $\operatorname{lp} C = \operatorname{rp} C$. Tällöin

$$\operatorname{lp} \neg B = \operatorname{lp} B \overset{\text{I.O.}}{=} \operatorname{rp} B = \operatorname{rp} \neg B$$

ja

$$\operatorname{lp}(B \wedge C) = \operatorname{lp} B + \operatorname{lp} C + 1 \overset{\text{I.O.}}{=} \operatorname{rp} B + \operatorname{rp} C + 1 = \operatorname{rp}(B \wedge C).$$

(Määritelmät ja todistukset ovat konnektiivien $\vee$, $\to$ ja $\leftrightarrow$ kohdalla täysin vastaavat kuin konnektiivin $\wedge$ kohdalla.) Induktioväite on näin todistettu ja induktioperiaatteen perusteella väite $(*)$ on voimassa.

Sekä induktio kaavan pituuden suhteen että induktio luonnollisten lukujen suhteen ovat erikoistapauksia yleisestä induktiivisen konstruktion käsitteestä.[11]

Induktiiviset määritelmät

Sen lisäksi, että kielen induktiivinen määrittely oikeuttaa induktiolla tapahtuvat todistukset, se myös mahdollistaa monien kaavoja koskevien käsitteiden induktiivisen eli *rekursiivisen* määrittelemisen (edellä oli esimerkki sulkujen lukumäärän täsmällisestä määrittelemisestä). Tarkastelemme tässä vain konnektiiveja $\neg$ ja $\wedge$ vastaavia kohtia, mutta määritelmät on suoraviivaista yleistää koskemaan myös muita konnektiiveja.

Kaavan A *rakennepuu* $T(A)$ määritellään seuraavasti:

$$T(p_i) = p_i, \qquad T(\neg B) = \begin{array}{c}\neg B\\ |\\ T(B)\end{array}, \qquad T(B \wedge C) = \begin{array}{c}B \wedge C\\ \diagup\ \diagdown\\ T(B) \quad T(C)\end{array}.$$

Kaavan A rakennepuussa esiintyviä kaavoja kutsutaan kaavan A alikaavoiksi. Kaavan A alikaavojen joukko $\operatorname{sub} A$ voidaan induktiivisesti määritellä seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sub} p_i &= \{p_i\},\\
\operatorname{sub} \neg A &= \{\neg A\} \cup \operatorname{sub} A,\\
\operatorname{sub}(A \wedge B) &= \{(A \wedge B)\} \cup \operatorname{sub} A \cup \operatorname{sub} B.
\end{aligned}$$

[11] Ks. Väänänen, Matemaattinen logiikka, 1987, ss. 13–17.

Esimerkki 70. Kaavan $p \to (q \land \neg r)$ rakennepuu on

$$
\begin{array}{ccccc}
 & p \to (q \land \neg r) & & & \\
 & \diagup \quad \diagdown & & & \\
p & & q \land \neg r & & \\
 & & \diagup \quad \diagdown & & \\
 & q & & \neg r & \\
 & & & | & \\
 & & & r & .
\end{array}
$$

Sen alikaavojen joukko on $\{p \to (q \land \neg r), p, q \land \neg r, q, \neg r, r\}$.

Sijoituksella $A[p/B]$ tarkoitetaan kaavaa, joka saadaan kaavasta A korvaamalla siinä jokainen lausemuuttujan p esiintymä kaavalla B. Jos p ei esiinny kaavassa A, sijoitus on tyhjä ja saadaan kaava A itse.

Esimerkki 71. Olkoon $A = p \lor (q \land \neg p)$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
A[p/r] &= r \lor (q \land \neg r), \\
A[r/p] &= A \quad \text{(koska } r \text{ ei esiinny kaavassa } A), \\
A[p/(q \lor \neg q)] &= (q \lor \neg q) \lor (q \land \neg(q \lor \neg q)).
\end{aligned}
$$

Yleisesti sijoituksella $A[q_1/B_1, q_2/B_2, \ldots, q_k/B_k]$ tarkoitetaan kaavaa, joka saadaan kaavasta A korvaamalla (jokainen lausemuuttujan q_i esiintymä kaavalla B_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Nämä korvaamiset on tehtävä samanaikaisesti.

Sijoitus $A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$ voidaan määritellä induktiivisesti toteamalla, että yhdistetyille kaavoille pätevät säännöt

$$
\begin{aligned}
(\neg B)[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k] &= \neg B[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k], \\
(B \circ C)[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k] &= B[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k] \circ C[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k],
\end{aligned}
$$

jossa $\circ \in \{\land, \lor, \to, \leftrightarrow\}$, ja määrittelemällä lausemuuttujille

$$
q[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k] = \begin{cases} B_i, & \text{jos } \exists i \in \{1, 2, \ldots, k\} \colon q = q_i \\ q & \text{muulloin.} \end{cases}
$$

Esimerkki 72. Olkoon $A = p \to (q \to p)$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
A[p/B, q/C] &= B \to (C \to B), \\
A[p/B, q/B] &= B \to (B \to B).
\end{aligned}
$$

Lisää esimerkkejä logiikan käsitteiden induktiivisista määritelmistä ja niihin liittyvistä induktiotodistuksista löytyy mm. oppikirjasta Rantala & Virtanen: Johdatus modaalilogiikkaan, 2003. Esimerkkejä luonnollisten lukujen ominaisuuksien induktiotodistuksista löytyy oppikirjasta Merikoski, Virtanen, Koivisto: Diskreetti matematiikka I, 2000. Jälkimmäisen avulla lukija voi perehtyä muutenkin tarkemmin joukkoihin, relaatioihin ja kuvauksiin liittyviin käsitteisiin ja niitä koskevien tulosten täsmällisiin todistuksiin.