
GRAAFITEORIAA

Pertti Koivisto – Riitta Niemistö

Esipuhe

Tämän monisteen tarkoituksena on tutustuttaa lukija graafiteorian peruskäsitteisiin ja -tuloksiin. Vaikka algoritminen graafiteoria on tietokoneiden laskentatehnon kasvun myötä tullut yhä merkittävämmäksi, pääpaino tässä monisteessa on kuitenkin perinteisellä graafiteorialla. Moniste siis sisältää huomattavan määrän lauseita ja niiden todistuksia. Algoritmista graafiteoriaa käsiteellään vain lyhyesti. Monisteen keskeisinä lähteinä ovat olleet Thulasiramanin ja Swamyn [17] sekä Rosenin [15] kirjat. Muita kirjallisuusluettelossa mainittuja teoksia on käytetty tukemaan edellä mainittuja lähteitä.

Monisteen aiempia versioita on käytetty Tampereen yliopiston matematiikan opiskelijoille pidetyillä aineopintojen tasoisilla graafiteorian kursseilla. Esitietoina kursseilla on edellytetty diskreetin matematiikan perustietoja (esimerkiksi Merikoski, Virtanen & Koivisto [13]). Monisteen teknisestä toimitustyöstä haluamme kiittää Heikki Rantalaihoa ja Helmi Untista.

Tampereella kesäkuussa 2001

Pertti Koivisto

Riitta Niemistö

Sisältö

Esipuhe	ii
Symbolit	v
1 Peruskäsitteitä	1
1.1 Määritelmiä	1
1.2 Esimerkkejä	5
1.3 Terminologiaa	7
1.4 Joitakin erikoisia yksinkertaisia graafeja	10
1.5 Aligraafi	13
1.6 Komplementtigrافی	15
1.7 Graafioperaatioita	17
1.8 Graafien esittäminen matriisien avulla	20
1.9 Isomorfisuus	22
2 Yhtenäisyys	24
2.1 Polku	24
2.2 Lyhin painotettu polku	30
2.3 Yhtenäinen graafi	31
2.4 Komponentti	34
2.5 Aste ja nulliteetti	36
2.6 Irrotussolmu ja lohko	37
2.7 Irrotus ja irrotusjoukko	42
2.8 Yhtenäisyysaste	47
2.9 Särmäyhtenäisyys	55
2.10 Mengerin lause	58
3 Puut	60
3.1 Puu	60
3.2 Virittävä puu	63
3.3 Virittävän puun konstruointi	66

3.4	Minimaalinen virittävä puu	69
3.5	Metsä	71
3.6	Silmukka ja irrotusjoukko	74
3.7	Perussilmukka ja perusirrotusjoukko	76
3.8	Graafin vektoriavaruus	79
4	Erilaisia graafeja	83
4.1	Eulerin graafi	83
4.2	Hamiltonin graafi	87
4.3	Tasograafi	89
4.4	Graafin värittäminen	94
5	Juurelliset puut	97
5.1	Juurellinen puu	97
5.2	Binääripuut ja muut m -puut	102
5.3	Juurellisen puun läpikäynti	106
5.4	Aritmeettisten lausekkeiden esitysmuotoja	108
	Kirjallisuutta	111
	Hakemisto	113

Symbolit

Symboli	Selitys	Sivu
$\delta(\cdot)$	minimiaste	8
$\kappa(\cdot)$	solmuyhtenäisyysaste	47
$\kappa'(\cdot)$	särmäyhtenäisyysaste	55
$\mu(\cdot)$	nulliteetti	36
$\rho(\cdot)$	graafin aste	36
$\chi(\cdot)$	väriluku	94
$\Delta(\cdot)$	maksimiaste	8
$\deg(\cdot)$	solmun tai alueen aste	7, 90
$\deg^+(\cdot)$	solmun lähtöaste	9
$\deg^-(\cdot)$	solmun tuloaste	9
$r(m, n)$	Ramsayn luku	16
$w(\cdot)$	paino	4
C_n	silmukka	11
$H_{k,n}$	Hararyn graafi	52
$K_{m,n}$	täydellinen kaksijakoinen graafi	11
K_n	täydellinen graafi	10
W_n	pyörä	11
W_C	silmukka-avaruus	79
W_S	irrotusavaruus	80

Luku 1

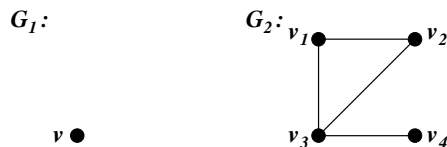
Peruskäsitteitä

Aluksi määrittelemme muutamia peruskäsitteitä. On syytä huomata, että graafiteorian terminologiassa on kirjallisuudessa paljon kirjavuutta. Tässä monisteessa käytetyt määritelmät ja termit eivät välttämättä ole aivan samat kuin jossain muussa esityksessä. Esimerkiksi jo pelkkä graafin käsite voidaan määritellä (ja myös määritellään) hyvinkin monella toisistaan eroavalla tavalla. Keskeisimmät käsitteet on annettu myös englanniksi, jotta kirjallisuuteen tutustuminen olisi helpompaa. On kuitenkin muistettava, että myös englanninkielisessä terminologiassa on kirjavuutta.

1.1 Määritelmiä

Määritelmä 1.1. *Yksinkertainen graafi (simple graph) G on pari (V, E) , missä $V \neq \emptyset$ on äärellinen joukko ja E on äärellinen joukko järjestämättömiä pareja $\{u, v\}$, missä $u, v \in V$, $u \neq v$. Joukon V alkioita sanotaan *solmuiksi (vertex, mon. vertices)* tai *pisteiksi* ja joukon E alkioita *särmiksi (edge)* tai *viivoiksi*.*

Yksisolmuista yksinkertaista graafia sanotaan *triviaaliksi graafiksi (trivial graph)*. Yksinkertaisen graafin määritelmästä seuraa, että triviaalissa graafissa ei ole yhtään särmää (ks. kuva 1.1). Joissakin kirjoissa myös *nollagraafia (null graph)*



Kuva 1.1. Triviaali graafi $G_1 = (\{v\}, \emptyset)$ ja yksinkertainen graafi $G_2 = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_3, v_4\}\})$.

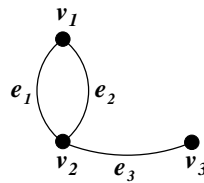
eli paria (\emptyset, \emptyset) pidetään graafina. Tässä monisteessa nollagraafi ei ole graafi (ellei erikseen toisin mainita).

Joskus on tarkoituksenmukaista tarkastella graafeja alkeellisemmin, esimerkiksi kuvion avulla (ks. esimerkiksi kuva 1.1). Tällöin esimerkiksi yksinkertainen graafi voidaan määrittellä seuraavalla määritelmän 1.1 kanssa yhtäpitävällä tavalla.

Määritelmä 1.2. Yksinkertainen graafi koostuu solmuista ja niitä yhdistävistä särmistä, missä

1. kahden eri solmun välillä voi olla korkeintaan yksi särmä,
2. solmusta ei voi olla särmää solmuun itseensä.

Määritelmä 1.3. *Multigraafi* (*multigraph*) on yksinkertaisen graafin yleistys, jossa kahden eri solmun välillä voi olla useita (äärellinen määrä) särmiä.



Kuva 1.2. Multigraafi (V, E) , missä $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ ja $E = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Vaikka edellä oleva multigraafin määrittely tuntuu luonnolliselta, määrittelyssä on tiettyjä ongelmia. Multigraafi voidaan nimittäin määrittellä kahdella toisistaan poikkeavalla tavalla.

Ensiksikin voidaan ajatella, että kun meillä on moninkertainen särmä, niin itse asiassa tällöin vain sama särmä esiintyy useamman kerran. Multigraafi on tällöin siis pari (V, E) , missä V on äärellinen epätyhjä solmujoukko ja särmäjoukko E on joukon V järjestämättömien pisteparien $\{u, v\}$ ($u \neq v$) muodostama *multijoukko* (*multiset*). Särmiä *kertaluku* ilmoittaa, kuinka monta kertaa särmä kuuluu multijoukkoon. Joissakin tilanteissa tämä on hyvinkin järkevä tulkinta multijoukolle. Tulkintaa käyttävät esimerkiksi Ruuhonen [16] ja Wilson [21].

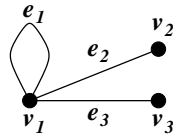
Toisaalta voidaan ajatella, että kun meillä on moninkertainen särmä, meillä on useita eri särmiä. Tällöin särmä on siis itse asiassa järjestetty pari $(e, \{u, v\})$. Multigraafi (V, E) muodostuu nyt äärellisestä epätyhjistä solmujoukosta V , äärellisestä särmäjoukosta E ja funktiosta

$$f: E \rightarrow \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}.$$

Jos $f(e_1) = f(e_2)$, särmät e_1 ja e_2 ovat *rinnakkaisia* (*parallel*). Tämäkin tulkinta on joissakin tilanteissa luonnollinen. Tulkintaa käyttävät esimerkiksi Rosen [15] sekä Thulasiraman ja Swamy [17].

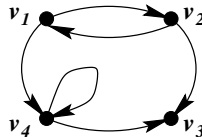
Edellä esitetyt määrittelytavat johtavat joissakin tapauksissa myös eri tuloksiin. Esimerkiksi multigraafien leikkaus (ks. määritelmä 1.32, s. 17) riippuu olennaisesti siitä, kumpaa määrittelytapaa käytetään. Tässä monisteessa pyritään kuitenkin välttämään tilanteita, joissa määrittelytapojen eroista voi aiheutua sekaannusta. Jos kuitenkin epäselvyyttä esiintyy, käytetään jälkimmäistä määrittelytapaa (ellei toisin mainita).

Määritelmä 1.4. *Pseudograafi* (*pseudograph*) on multigraafin yleistys, jossa solmusta voi olla särmä tai särmiä solmuun itseensä. Näitä särmiä sanotaan *luupeiksi* (*loop*).



Kuva 1.3. Pseudograafi $(V, E) = (\{v_1, v_2, v_3\}, \{e_1, e_2, e_3\})$.

Määritelmä 1.5. *Suunnattu graafi* (*directed graph, oriented graph*) eli *digraafi* G on pari (V, E) , missä $V \neq \emptyset$ on äärellinen joukko ja E on joukko järjestettyjä pareja (u, v) , missä $u, v \in V$.



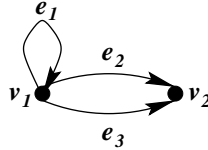
Kuva 1.4. Suunnattu graafi $(V, E) = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_4, v_3), (v_4, v_4)\})$.

Suunnatun graafin särmiä sanotaan *kaariksi* tai *nuoliksi* (*arc*). Koska suunnatun graafin määritelmässä ei edellytetä, että $u \neq v$, suunnatussa graafissa voi olla luuppeja. Myös suunnatun graafin voi määritellä alkeellisemmin.

Määritelmä 1.6. Suunnattu graafi koostuu solmuista ja niitä yhdistävistä kaarista, missä

1. kahden eri solmun välillä voi olla korkeintaan kaksi kaarta, yksi kumpaankin suuntaan,
2. solmusta voi olla kaari solmuun itseensä.

Määritelmä 1.7. *Suunnattu multigraafi (directed multigraph)* on suunnatun graafin yleistys, jossa voi olla moninkertaisia kaaria.



Kuva 1.5. Suunnattu multigraafi $(V, E) = (\{v_1, v_2\}, \{e_1, e_2, e_3\})$.

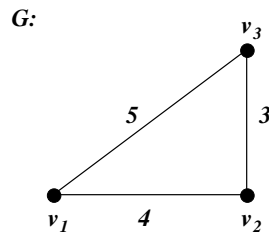
Kun tässä monisteessa puhutaan pelkästä graafista, tarkoitetaan yleensä mitä tahansa suuntaamatonta graafia. Jos kuitenkin graafin luonne on asiayhteydestä selvä, lisämääre on usein jätetty pois.

Graafin $G = (V, E)$ solmujoukolle V voidaan tarvittaessa käyttää merkintää $V(G)$ ja särmäjoukolle E merkintää $E(G)$.

Määritelmä 1.8. *Painotettu graafi (weighted graph)* on graafin yleistys, jossa jokaiseen särmään on liitetty jokin luku. Tätä lukua sanotaan särmän *painoksi*.

Määritelmä 1.9. Merkinnällä $w(\cdot)$ tarkoitetaan särmän painoa tai painotetun graafin särmien yhteenlaskettua painoa.

Esimerkki 1.1. Kuvan 1.6 graafissa G särmien painot ovat $w(\{v_1, v_3\}) = 5$, $w(\{v_2, v_3\}) = 3$ ja $w(\{v_1, v_2\}) = 4$. Graafin G särmien yhteenlaskettu paino $w(G)$ on 12.

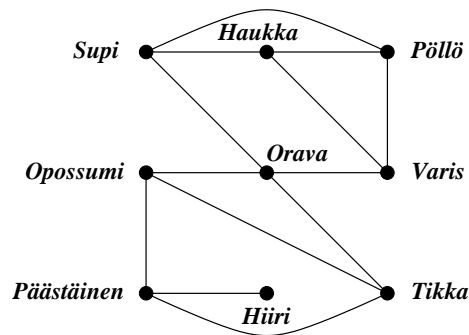


Kuva 1.6. Painotettu graafi G , joka mallintaa Pythagoraan lausetta.

1.2 Esimerkkejä

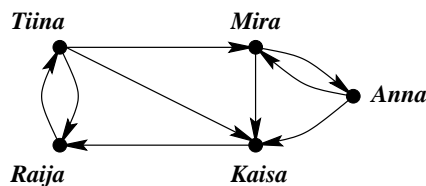
Graafeilla voidaan mallintaa monia asioita. Seuraavassa on neljä esimerkkiä graafien käytöstä mallina.

Esimerkki 1.2. Graafien avulla voidaan mallintaa eri eläinlajien välistä vuorovaikutusta. Esimerkiksi ekosysteemissä lajien välistä kilpailua voidaan mallintaa graafilla, joka kuvaa ekologisten lokeroiden päällekkäisyyttä (*niche overlap graph*). Graafissa kutakin eläinlajia vastaa oma solmunsu ja kaksi eri solmua on yhdistetty särmällä vain, jos kyseisiä särmiä edustavat eläinlajit kilpailevat keskenään eli käyttävät samoja ravintovaroja. Kuvan 1.7 graafi mallintaa metsän ekosysteemiä. Graafin perusteella esimerkiksi orava ja supi ovat keskenään kilpailevia lajeja, mutta varis ja päästäinen eivät ole.



Kuva 1.7. Ekologisten lokeroiden päällekkäisyys.

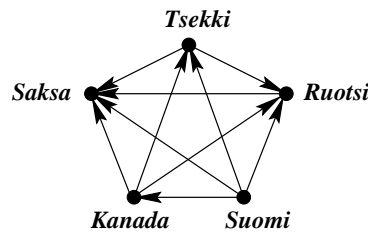
Esimerkki 1.3. Ryhmän käyttäytymistä tutkittaessa voidaan havaita, että jotkut ryhmän jäsenet voivat vaikuttaa ryhmän muiden jäsenten käyttäytymiseen. Tällaista käyttäytymistä voidaan mallintaa suunnatulla vaikutusvaltagraafilla. Kutakin ryhmän jäsentä edustaa oma solmunsu. Solmujen a ja b välillä on särmä



Kuva 1.8. Ryhmän jäsenten vaikutus toistensa käyttäytymiseen.

solmusta a solmuun b , jos solmua a edustava henkilö vaikuttaa solmua b edustavan henkilön käyttäytymiseen. Kuvan 1.8 graafin mukaan esimerkiksi Kaisa voi vaikuttaa Raijan käyttäytymiseen, Raija voi vaikuttaa Tiinan käyttäytymiseen ja Tiina voi vaikuttaa Kaisan käyttäytymiseen.

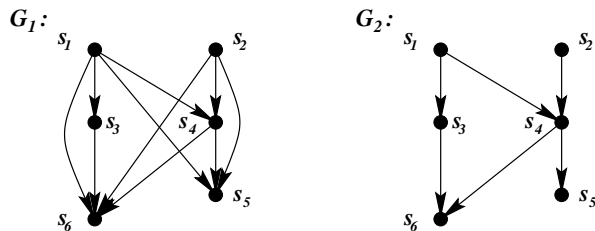
Esimerkki 1.4. Turnausta, jossa jokainen joukkue pelaa toistaan vastaan täsmälleen kerran, voidaan mallintaa suunnatulla graafilla. Tällöin kutakin joukkuetta vastaa oma solmunsä ja graafissa on särmä (a, b) , jos joukkue a voittaa joukkueen b (oletetaan, että tasapeli ei ole mahdollinen). Esimerkiksi kuvan 1.9 turnauksessa Suomi on voittamaton ja Ruotsilla on yksi voitto sekä kolme tappiota.



Kuva 1.9. Vuodenvaihteen 1996–97 jääkiekon nuorten MM-kisatulokset.

Esimerkki 1.5. Tietokoneohjelman käskyjen suoritusjärjestystä voidaan mallintaa suunnatulla graafilla. Graafissa kutakin käskyä edustaa oma solmunsä ja solmusta a on särmä solmuun b , jos solmun a edustama käsky suoritetaan ennen solmun b edustamaa käskyä. Kuvan 1.10 suunnatussa graafissa G_1 esimerkiksi käskyä s_5 ei voida suorittaa ennen käskyjä s_1 , s_2 ja s_4 , mutta käskyt s_5 ja s_6 voidaan suorittaa samanaikaisesti. Yksinkertaisuuden vuoksi ”turhat” särmät voidaan jättää pois. Tällöin saadaan suunnattu graafi G_2 .

- $s_1 : a := 0$
- $s_2 : b := 1$
- $s_3 : c := a + 1$
- $s_4 : d := a + b$
- $s_5 : e := d + 1$
- $s_6 : f := c + d$



Kuva 1.10. Tietokoneohjelman käskyjen suoritusjärjestys.

1.3 Terminologiaa

Seuraavaksi esitämme vielä muutamia graafeihin liittyviä perustermejä ja tarkastelemme joitakin graafien perusominaisuuksia. Luvun 1.1 tapaan tutkimme ensin suuntaamattomia graafeja ja sitten suunnattuja graafeja.

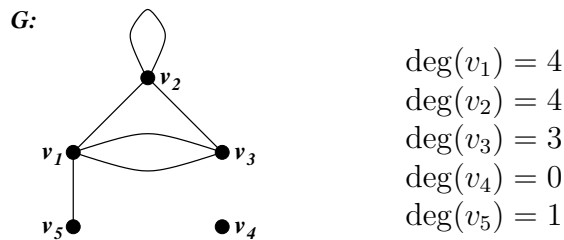
Määritelmä 1.10. Olkoon solmujen u ja v välillä särmä e . Silloin

1. solmut u ja v ovat *vierussolmut* (*adjacent, neighbors*),
2. särmä e *yhdistää* (*connects*) solmut u ja v ,
3. solmut u ja v ovat särmän e *päätesolmut* eli *päätepiisteet* (*end vertices, end points*),
4. särmä e kulkee solmujen u ja v kautta (*incident with*).

Määritelmä 1.11. *Solmun aste* (*degree*) $\deg(\cdot)$ ilmaisee kuinka monen särmän päätesolmuna solmu on. Luupilla tulkitaan olevan kaksinkertainen päätesolmu.

Määritelmä 1.12. Solmu u on *eristetty* (*isolated*), jos $\deg(u) = 0$, ja solmu u on *loppusolmu* (*pendant vertex*), jos $\deg(u) = 1$. Jos särmän päätesolmuna on loppusolmu, särmä on *loppusärmä* (*pendant edge*).

Esimerkki 1.6. Kuvassa 1.11 solmujen asteet on merkitty solmujen viereen. Solmu v_4 on eristetty solmu ja solmu v_5 loppusolmu. Luuppi kasvattaa solmun v_2 astetta kahdella.



Kuva 1.11. Graafi G ja graafin G solmujen asteet.

Seuraavaksi esitämme kaksi yksinkertaista tulosta, joita yksinkertaisuudetaan huolimatta tarvitaan varsin usein.

Lause 1.1 ("Handshaking theorem"). Olkoon (V, E) suuntaamaton graafi. Silloin

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v).$$

Merkinnällä $|\cdot|$ tarkoitetaan joukon alkioiden (tässä siis särmien) lukumäärää.

Todistus. Kukin särmä lisää solmujen astelukujen summaa kahdella. □

Lause 1.2. Suuntaamattomassa graafissa on parillinen määrä paritonasteisia solmuja.

Todistus. Olkoon (V, E) suuntaamaton graafi ja olkoon V_1 niiden solmujen joukko, joiden asteluku on pariton, ja V_2 niiden, joiden asteluku on parillinen. Koska joukot V_1 ja V_2 ovat erillisiä ja $V = V_1 \cup V_2$, niin lauseen 1.1 perusteella

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v).$$

Siis paritonasteisten solmujen astelukujen summa

$$\sum_{v \in V_1} \deg(v) = 2|E| - \sum_{v \in V_2} \deg(v).$$

Kun $v \in V_2$, niin $\deg(v)$ on parillinen, joten summa $\sum_{v \in V_2} \deg(v)$ on parillinen. Koska myös $2|E|$ on parillinen, on myöskin erotus $2|E| - \sum_{v \in V_2} \deg(v)$ parillinen. Koska nyt yhteenlaskettavat $\deg(v)$ ovat summassa $\sum_{v \in V_1} \deg(v)$ parittomia ja yhteenlaskettavien summa on parillinen, täytyy yhteenlaskettavia olla parillinen määrä. Siis joukossa V_1 on parillinen määrä alkioita eli graafissa on parillinen määrä solmuja, joiden asteluku on pariton. □

Määritelmä 1.13. Olkoon $G = (V, E)$ suuntaamaton graafi. Silloin

$$\delta(G) = \min_{v \in V} (\deg(v))$$

on graafin solmujen *minimiaste* (*minimum degree*) ja

$$\Delta(G) = \max_{v \in V} (\deg(v))$$

maksimiaste (*maximum degree*).

Esimerkki 1.7. Kuvan 1.11 graafin minimiaste on nolla ja maksimiaste neljä.

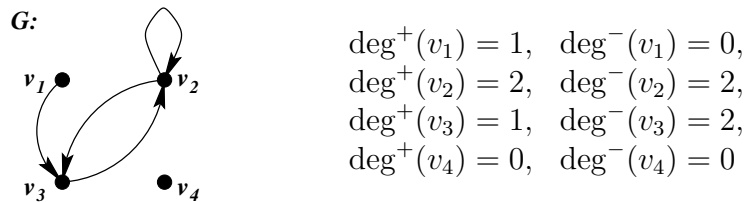
Tarkastelemme seuraavaksi suunnattuja graafeja. Niiden terminologia on osittain sama kuin suuntaamattomien graafien terminologia.

Määritelmä 1.14. Olkoon $e = (u, v)$ suunnatun graafin kaari solmusta u solmuun v . Silloin

1. solmu u edeltää (*is adjacent to*) solmua v ,
2. solmu v seuraa (*is adjacent from*) solmua u ,
3. solmu u on särmän e lähtösolmu (*initial vertex*),
4. solmu v on särmän e maalisolmu (*terminal vertex*).

Määritelmä 1.15. Solmun lähtöaste (*out-degree*) $\deg^+(\cdot)$ tarkoittaa niiden kaarien lukumäärää, joiden lähtösolmuna solmu on. Vastaavasti solmun tuloaste (*in-degree*) $\deg^-(\cdot)$ tarkoittaa niiden kaarien lukumäärää, joiden maalisolmuna solmu on.

Esimerkki 1.8. Kuvassa 1.12 näkyvät graafin G solmujen lähtö- ja tuloasteet.



Kuva 1.12. Suunnatun graafin G lähtö- ja tuloasteet.

Seuraava lause vastaa lausetta 1.1 suunnatuille graafeille. Myöskin tätä lausetta tarvitaan melko usein.

Lause 1.3. *Olkoon (V, E) suunnattu graafi. Silloin*

$$\sum_{v \in V} \deg^+(v) = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = |E|.$$

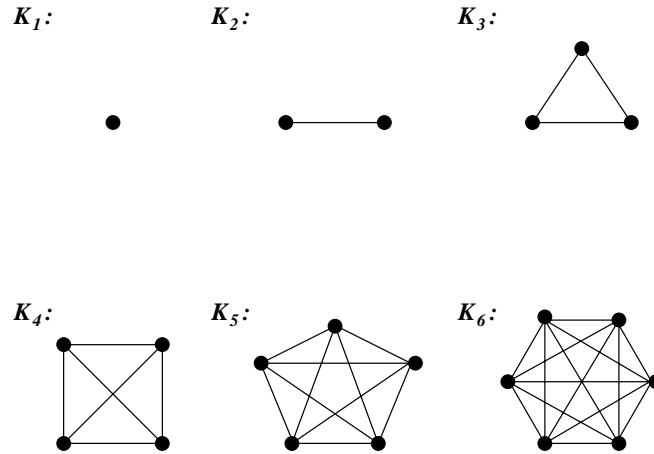
Todistus. Kukin särmä lähtee jostakin solmusta ja tulee johonkin solmuun. Siis kukin särmä lisää sekä lähtö- että tuloasteiden summaa yhdellä.

□

1.4 Joitakin erikoisia yksinkertaisia graafeja

Joillakin yksinkertaisilla graafeilla on erityinen nimi, jotta niihin on helppo viitata. Seuraavaksi määrittelemme muutamia tällaisia graafeja.

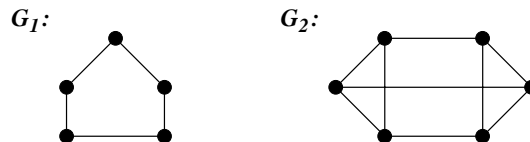
Määritelmä 1.16. Yksinkertainen graafi on *täydellinen* (*complete*), jos jokaisen kahden eri solmun välillä on särmä. Täydelliselle n -solmuiselle graafille käytetään merkintää K_n .



Kuva 1.13. Täydelliset graafit K_1, K_2, \dots, K_6 .

Täydellisessä graafissa K_n on $n(n - 1)/2$ särmää. (Totea.)

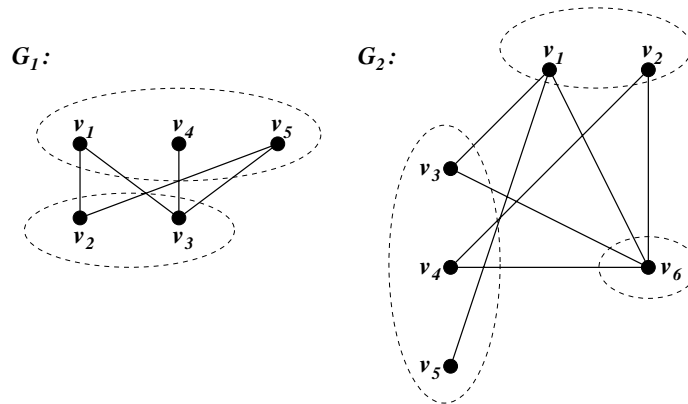
Määritelmä 1.17. Yksinkertainen graafi on *k-säännöllinen* (*k-regular*), jos sen jokaisen solmun aste on k .



Kuva 1.14. Graafi G_1 on 2-säännöllinen ja graafi G_2 on 3-säännöllinen.

Täydellinen graafi K_n on $(n - 1)$ -säännöllinen.

Määritelmä 1.18. Suuntaamaton graafi (V, E) on *kaksijakoinen* (*bipartite*), jos solmujoukko V voidaan jakaa kahteen sellaiseen epätyhjään joukkoon V_1 ja V_2 , että jokaisen särmän toinen päätesolmu kuuluu joukkoon V_1 ja toinen joukkoon V_2 .

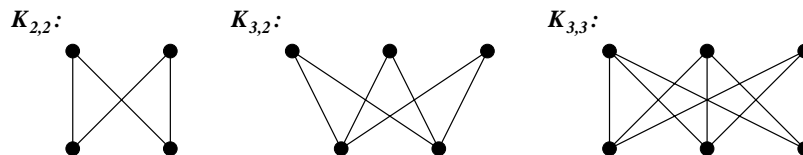


Kuva 1.15. Kaksijakoinen graafi G_1 ja kolmijakoinen graafi G_2 .

Kaksijakoisen graafin käsite voidaan yleistää luonnollisella tavalla, vaikkakin k -jakoisista graafeista useimmiten tarvitaan juuri kaksijakoisia.

Määritelmä 1.19. Suuntaamaton graafi (V, E) on k -jakoinen (k -partite), jos on olemassa sellainen solmujoukon V luokkajako $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$, että joukon E minkään särmän molemmat päätesolmut eivät kuulu samaan joukkoon V_i .

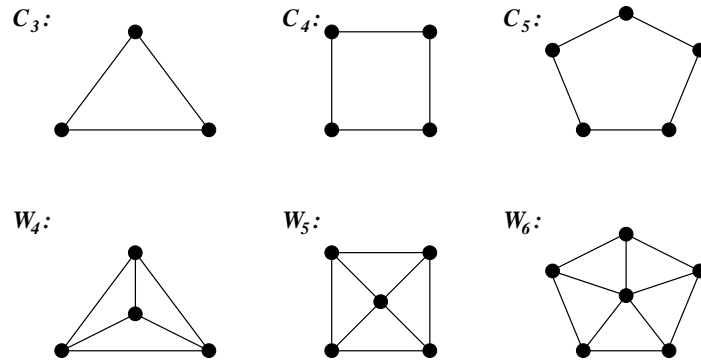
Määritelmä 1.20. Yksinkertainen graafi $K_{m,n}$ on täydellinen kaksijakoinen graafi (*complete bipartite graph*), jos sen solmut voidaan jakaa kahteen sellaiseen m - ja n -alkioiseen osajoukkoon, että kahden solmun välillä on särmä täsmälleen silloin, kun solmut kuuluvat eri osajoukkoihin.



Kuva 1.16. Täydelliset kaksijakoiset graafit $K_{2,2}$, $K_{3,2}$ ja $K_{3,3}$.

Määritelmä 1.21. Yksinkertainen graafi $C_n = (V, E)$ ($n = 3, 4, 5, \dots$) on *silmukka* (*cycle*), jos sen solmut ja särmät voidaan antaa joukkoina $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ja $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$.

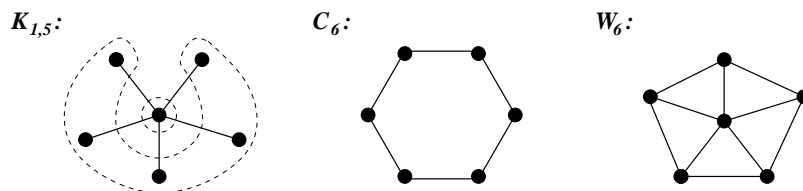
Määritelmä 1.22. Silmukasta C_{n-1} saadaan *pyörä* (*wheel*) $W_n = (V, E)$ ($n = 4, 5, 6, \dots$), kun siihen lisätään yksi solmu ja lisäksi särmä tästä solmusta jokaiseen muuhun pyörän solmuun.



Kuva 1.17. Silmukat C_3 , C_4 ja C_5 sekä pyörät W_4 , W_5 ja W_6 .

Graafien avulla voidaan mallintaa tietokoneverkkoja. Tällöin graafin solmut vastaavat verkon koneita ja särmät yhteyksiä koneiden välillä ("piuhoja"). Usein on tärkeää, ettei yhden koneen hajoaminen tai yhteyden katkeaminen katkaise verkkoa. Seuraavassa esimerkissä on muodostettu lähiverkko kolmella yksinkertaisella tavalla, jotka ovat eri tavoin haavoittuvia. Todelliset verkot ovat tietenkin usein paljon monimutkaisempia.

Esimerkki 1.9 (lähiverkko). Koneet voidaan liittää verkkoon esimerkiksi (a) yhdistämällä kaikki koneet keskuskoneeseen ($K_{1,n-1}$), (b) yhdistämällä koneet silmukaksi (C_n) tai (c) yhdistämällä koneet pyöräksi (W_n), jossa keskuskone on yhdistettyä kaikkiin muihin koneisiin (ks. kuva 1.18).

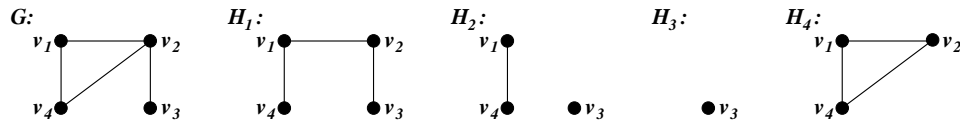


Kuva 1.18. Kolme lähiverkkoa.

1.5 Aligraafi

Graafien osia, jotka itsessään ovat graafeja, sanotaan aligraafeiksi. Seuraavaksi määrittelemme aligraafeihin liittyviä käsitteitä.

Määritelmä 1.23. Olkoot $G = (V, E)$ ja $H = (W, F)$ sellaisia graafeja, että $W \subseteq V$ ja $F \subseteq E$. Silloin graafi H on graafin G *aligraafi* (*subgraph*). Jos lisäksi $W \subset V$ tai $F \subset E$, niin kyseessä on *aito aligraafi*.



Kuva 1.19. Graafi G ja joitakin sen aligraafeja.

Esimerkki 1.10. Graafilla K_n on

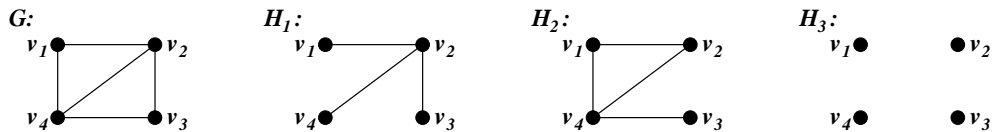
$$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} 2^{\frac{i(i-1)}{2}} - 1$$

eri aligraafia. (Totea.)

Määritelmä 1.24. Jos graafin G aligraafi H on täydellinen graafi, niin H on graafin G *klikki* (*clique*).

Esimerkki 1.11. Kuvassa 1.19 aligraafit H_3 ja H_4 ovat graafin G klikkejä.

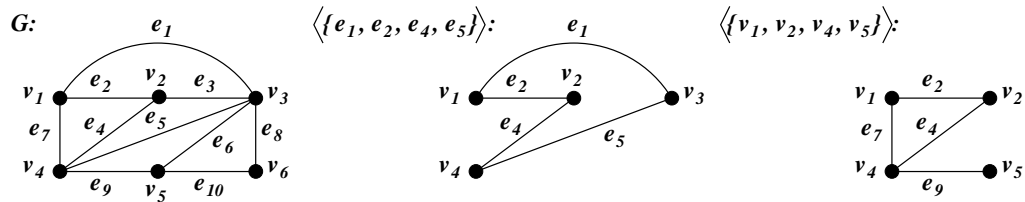
Määritelmä 1.25. Olkoon $G = (V, E)$ ja $H = (V, F)$ sen aligraafi. Silloin H on graafin G *virittävä* (*spanning*) aligraafi.



Kuva 1.20. Graafi G ja joitakin sen virittäviä aligraafeja.

Määritelmä 1.26. Olkoon $G = (V, E)$ graafi ja $F \subseteq E$ sen epätyhjä särmäjoukko. Tällöin $H = (W, F)$, missä $W \subseteq V$ on joukon F särmien päätesolmujen joukko, on joukon F (särmä)indusoima (edge-induced) graafin G aligraafi. Tällöin merkitään $H = \langle F \rangle$.

Määritelmä 1.27. Olkoon $G = (V, E)$ graafi ja $W \subseteq V$ sen epätyhjä solmujoukko. Tällöin $H = (W, F)$ on joukon W (solmu)indusoima (vertex-induced) graafin G aligraafi, jos $F \subseteq E$ muodostuu niistä joukon E särmistä, joiden päätesolmut kuuluvat joukkoon W . Tällöin merkitään $H = \langle W \rangle$.



Kuva 1.21. Graafi G ja tämän särmäindusoitu aligraafi $\langle \{e_1, e_2, e_4, e_5\} \rangle$ sekä solmuindusoitu aligraafi $\langle \{v_1, v_2, v_4, v_5\} \rangle$.

”Indusointi” määritelmässä 1.26 ja 1.27 siis tarkoittaa, että jos särmäjoukko $F \subseteq E$ tai solmujoukko $W \subseteq V$ on annettu, niin vastaava aligraafi on yksikäsitteinen. Joskus on käytännöllistä samastaa särmäjoukko (tai solmujoukko) ja sen indusoima graafi.

Tyhjä särmä- tai solmujoukko indusoi nollagraafin, jota tässä monisteessa ei pidetä (ali)graafina.

Määritelmä 1.28. Graafin G aligraafia H sanotaan graafin G *maksimaaliseksi* (*maximal*) aligraafiksi jonkin ominaisuuden P suhteen, jos

- (i) graafilla H on ominaisuus P ja
- (ii) aina, kun H on graafin G aligraafin F aito aligraafi, aligraafilla F ei ole ominaisuutta P .

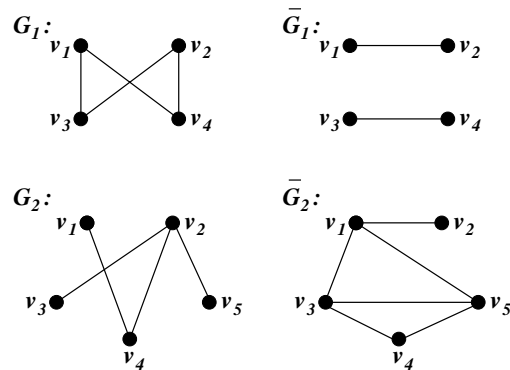
Vastaavasti määritellään *minimaalinen* (*minimal*) aligraafi.

Maksimaalinen tai minimaalinen aligraafi ei siis välttämättä ole yksikäsitteinen. Jatkossa maksimaalinen ja minimaalinen aligraafi ovat tärkeitä käsitteitä. Esimerkkejä käsitteiden käytöstä, kuten komponentti, irrotusjoukko ja lohko, löytyy seuraavista luvuista.

1.6 Komplementtograafi

Joskus on myös hyödyllistä tarkastella, mitä yhteyksiä (eli särmiä) graafin solmujen välillä ei ole.

Määritelmä 1.29. Yksinkertaisen graafin G *komplementtograafi* (*complementary graph*) \bar{G} on yksinkertainen graafi, jonka solmut ovat samat kuin graafin G solmut ja jossa kaksi eri solmua ovat vierussolmuja täsmälleen silloin, kun ne eivät ole vierussolmuja graafissa G .



Kuva 1.22. Graafit G_1 ja G_2 ja niiden komplementtograafit \bar{G}_1 ja \bar{G}_2 .

Selvästikin graafi on komplementtinsa komplementti eli $\bar{\bar{G}} = G$.

Lause 1.4. *Olkoon G vähintään kuusisolmuinen graafi. Tällöin täydellinen kolmisolmuinen graafi K_3 on joko graafin G tai graafin G komplementin \bar{G} aligraafi.*

Todistus. Tarkastelemme tässä kuusisolmuista graafia. Useampisolmuiset graafit käsitellään vastaavasti tarkastelemalla jotakin kuuden solmun indusoimaa aligraafia.

Olkoon v jokin graafin G solmuista. Laatikkoperiaatteen mukaan lopuista viidestä solmusta löytyy ainakin kolmen solmun v vierussolmun joukko $\{v_1, v_2, v_3\}$ joko graafista G tai graafista \bar{G} . Todistuksen yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa, että solmut ovat solmun v vierussolmuja graafissa G .

Jos näistä solmuista kaksi, esimerkiksi v_1 ja v_2 , ovat vierussolmuja, niin graafilla G on aligraafina $K_3 = \langle v, v_1, v_2 \rangle$. Jos taas mitkään kolme kyseisistä solmuista eivät ole vierussolmuja, graafilla \bar{G} on aligraafina K_3 , jonka solmujoukko on $\{v_1, v_2, v_3\}$.

□

Lausetta 1.4 soveltamalla voidaan esimerkiksi osoittaa, että kuuden kissan ryhmästä löytyy aina kolme, jotka kaikki ovat lipaisseet toisiaan kuonoon, tai kolme, joista mitkään eivät ole lipaisseet toisiaan kuonoon.

Lauseen 1.4 ongelmaa voidaan tarkastella myös yleisemmin, eli milloin täydellinen graafi K_m on jonkin graafin tai sen komplementin aligraafi. Tähän yleiseen ongelmaan liittyvät ns. Ramsayn luvut. *Ramsayn luku* $r(m, n)$ on pienin sellainen luku, että jos G on $r(m, n)$ -solmuinen graafi, niin joko K_m on graafin G aligraafi tai K_n on graafin G komplementin aligraafi.

Koska $G = \overline{\overline{G}}$, niin $r(m, n) = r(n, m)$. Selvästikin $r(1, n) = r(m, 1) = 1$ ja $r(2, n) = r(m, 2) = 2$ (totea). Lauseen 1.4 nojalla taas $r(3, 3) \leq 6$. Edellä mainittujen tapausten lisäksi Ramsayn lukuja tunnetaan tällä hetkellä (vuonna 1999) vain muutama (ks. Radziszowski [14]). Tunnetut luvut esitetään taulukossa 1.1. Voidaan kuitenkin osoittaa (ks. esimerkiksi Chartrand & Lesniok [3] tai West [19]), että

$$r(m, n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}.$$

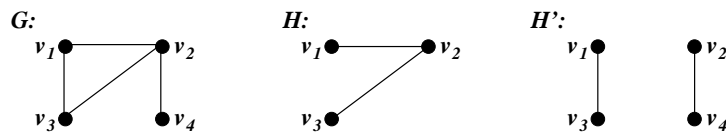
Hyviä ala- ja ylärajoja Ramsayn luvuille tunnetaan niitäkin kuitenkin vain muutamia (ks. Radziszowski [14]).

$n \setminus m$	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4	9	18	25				

Taulukko 1.1. Joitakin Ramsayn lukuja $r(m, n)$.

Määritelmä 1.30. Olkoon $H = (W, F)$ yksinkertaisen graafin $G = (V, E)$ aligraafi. Tällöin graafia $(V, E \setminus F)$ sanotaan *graafin H komplementiksi graafin G suhteen* (*complement of H in G*).

Tavallinen n -solmuinen yksinkertaisen graafin komplementti on siis komplementti täydellisen graafin K_n suhteen.

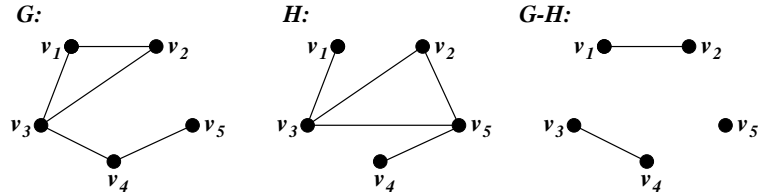


Kuva 1.23. Graafi H' on graafin H komplementti graafin G suhteen.

1.7 Graafigraaatioita

Graafeille voidaan määrittellä operaatioita, joista osalle löytyy vastaava joukko-opillinen operaatio. Seuraavaksi määrittelemme muutamia tällaisia operaatioita.

Määritelmä 1.31. Olkoot $G = (V, E)$ ja $H = (W, F)$ sellaisia yksinkertaisia graafeja, että $W \subseteq V$. Tällöin graafien G ja H erotus $G - H = (V, E \setminus F)$.



Kuva 1.24. Graafit G ja H sekä niiden erotus $G - H$.

Erotus yleistää siis määritelmän 1.30 myös tapaukseen, jossa H ei ole graafin G aligraafi (mutta kylläkin $W \subseteq V$). Jos H on graafin G aligraafi, niin $G - H$ on graafin H komplementti graafin G suhteen.

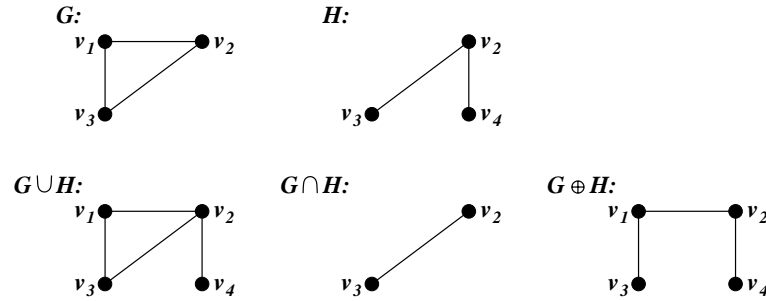
Määritelmä 1.32. Olkoot $G = (V, E)$ ja $H = (W, F)$ yksinkertaisia graafeja. Lisäksi kohdassa (b) oletetaan, että $V \cap W \neq \emptyset$, ja kohdassa (c), että $E \neq F$. Tällöin graafien G ja H

- (a) *unioni (union)* $G \cup H$ on graafi $(V \cup W, E \cup F)$,
- (b) *leikkaus (intersection)* $G \cap H$ on graafi $(V \cap W, E \cap F)$,
- (c) *rengassumma (ring sum)* $G \oplus H$ on särmäjoukon $E \oplus F$ indusoima graafin $G \cup H$ aligraafi. Joukko-operaatiolla \oplus tarkoitetaan tässä *symmetristä erotusta (symmetric difference)*, ts.

$$E \oplus F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E).$$

Kuvassa 1.25 on esimerkki kustakin määritelmän 1.32 operaatiosta. Kuten tästäkin esimerkistä havaitaan, rengassummaan kuuluvat siis täsmälleen ne särmät, jotka eivät ole yhteisiä alkuperäisille graafeille.

Operaatioiden tuloksena oleva graafi on yksinkertainen graafi. Koska rengassumma on särmäjoukon indusoima aligraafi, siinä ei ole eristettyjä solmuja. Operaatiot, kuten myös erotus, voidaan yleistää muillekin kuin yksinkertaisille graafeille ottamalla ”luonnollisella tavalla” huomioon särmien moninkertaisuudet.



Kuva 1.25. Graafit G ja H sekä niiden unioni, leikkaus ja rengassumma.

Jos solmujoukot V ja W ovat erillisiä, leikkausta ei voida määritellä, koska graafissa solmujoukko ei voi olla tyhjä. Vastaavasti rengassummaa ei voida määritellä, jos $E = F$. Jos kuitenkin graafin määritelmää laajennettaisiin niin, että nollagraafia pidettäisiin graafina, kumpikin operaatio olisi mahdollinen.

Määritelmän 1.32 operaatiot ovat kahden graafin välisiä operaatioita. Kaikki kolme operaatiota ovat vaihdannaisia ja liitännäisiä. Tarkastelemme seuraavaksi vielä muutamaa vain yhteen graafin liittyvää operaatiota.

Määritelmä 1.33 (solmun poisto). Jos v on vähintään kaksisolmuisen graafin $G = (V, E)$ solmu, niin $G - v$ on solmujoukon $V \setminus \{v\}$ indusoima graafin G aligraafi.

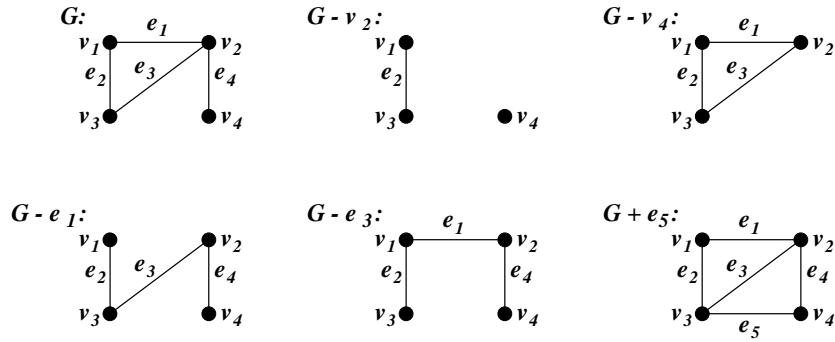
Määritelmä 1.34 (särmän poisto). Jos e on graafin $G = (V, E)$ särmä, niin $G - e = (V, E \setminus \{e\})$.

Määritelmä 1.35 (särmän lisäys). Jos u ja v ovat graafin $G = (V, E)$ solmuja ja $e = \{u, v\}$, niin $G + e = (V, E \cup \{e\})$.

Koska useampia solmuja tai särmää poistettaessa poistamisjärjestyksellä ei ole merkitystä, merkintöjä $G - \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ja $G - \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ voidaan käyttää tarkoittamaan, että solmuja tai särmää poistetaan useampia. Vastaavasti voidaan käyttää merkintää $G + \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tarkoittamaan, että särmää lisätään useampia.

Kuvassa 1.26 on esimerkkejä solmujen poistamisesta, särmien poistamisesta ja särmän lisäämisestä. Vaikka särmän lisääminen vaikuttaa vain yhteen graafiin liittyvältä operaatiolta, kyseessä on paremminkin kahden graafin unioni. Esimerkiksi kuvan 1.26 tapauksessa graafi $G + e_5$ on sama kuin graafi $G \cup (\{v_3, v_4\}, \{e_5\})$.

Määritelmä 1.36. Graafin G solmujen u ja v yhdistämisellä (*short-circuiting, identifying*) tarkoitetaan operaatiota, jossa solmut u ja v korvataan uudella solmulla w ja kaikki solmujen u ja v kautta kulkevat särmät asetetaan kulkemaan solmun w kautta.

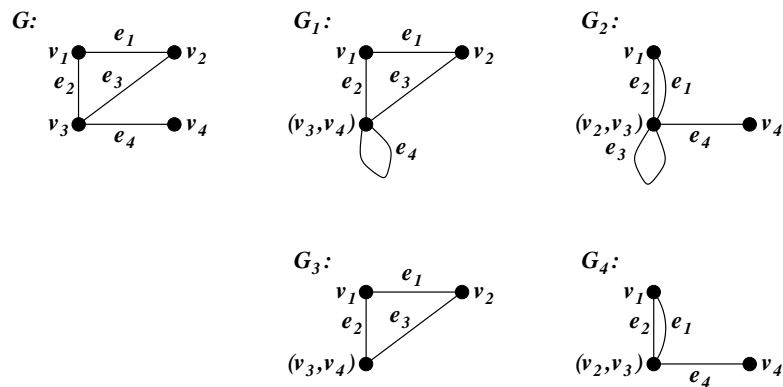


Kuva 1.26. Muutama yhteen graafiin liittyvä operaatio.

Määritelmä 1.37. Särmen *kutistamisella* (*contraction*) tarkoitetaan operaatiota, jossa särmä ensin poistetaan ja sitten sen päätesolmut yhdistetään. Graafi G on kutistettavissa graafiksi H , jos H saadaan graafista G peräkkäisillä särmien kutistusoperaatioilla.

Esimerkki 1.12. Kuvassa 1.27 on kaksi esimerkkiä sekä solmujen yhdistämisestä että särmen kutistamisesta. Graafi G_1 on saatu graafista G yhdistämällä solmut v_3 ja v_4 ja graafi G_2 yhdistämällä solmut v_2 ja v_3 . Graafi G_3 puolestaan on saatu kutistamalla särmä e_4 ja graafi G_4 kutistamalla särmä e_3 . Kuten havaitaan, vain tapauksessa G_3 tuloksena oleva graafi on yksinkertainen, vaikka alkuperäinen graafi on yksinkertainen.

Jos solmujen yhdistäminen ja särmen kutistus rajoitetaan yksinkertaisille graafeille, niin tuloksista poistetaan luopit ja rinnakkaisista särmistä valitaan sol-



Kuva 1.27. Solmujen yhdistäminen ja särmen kutistaminen.

muparia kohti yksi. Mikäli multigraafissa rinnakkaiset särmät tulkitaan eri särmiksi, on tietysti myös sovittava, mikä eri särmistä jätetään jäljelle.

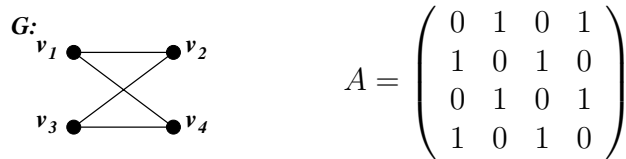
1.8 Graafien esittäminen matriisien avulla

Graafi voidaan esittää mm. vierusmatriisin tai tapausmatriisin avulla. Aloitamme yksinkertaisesta graafista ja yleistämme sitten multi-, pseudo- ja suunnatuille graafeille.

Määritelmä 1.38. Olkoon $G = (V, E)$ yksinkertainen n -solmuinen graafi. Merkitään $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Silloin graafin G vierusmatriisi (*adjacency matrix*) A on $n \times n$ -matriisi, jossa

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos } v_i \text{ ja } v_j \text{ ovat vierussolmuja,} \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

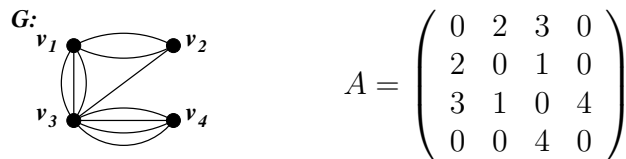
Yksinkertaisen graafin vierusmatriisi on symmetrinen, sen lävistäjäalkiot ovat nollia ja muut alkiot nollia tai ykkösiä.



Kuva 1.28. Graafi G ja graafin G vierusmatriisi A .

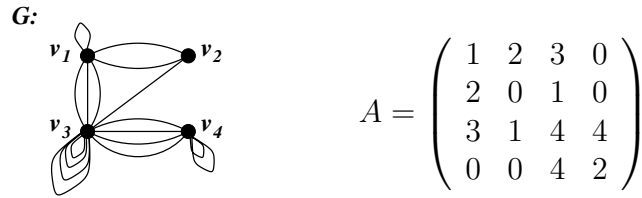
Määritelmä 1.39. Olkoon $G = (V, E)$ suuntaamaton n -solmuinen multigraafi. Merkitään $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Silloin graafin G vierusmatriisi A on $n \times n$ -matriisi, jossa

$$a_{ij} = \text{solmujen } v_i \text{ ja } v_j \text{ välillä olevien särmien lukumäärä.}$$



Kuva 1.29. Multigraafi G ja graafin G vierusmatriisi A .

Suuntaamattoman multigraafin vierusmatriisi on symmetrinen ja sen lävistäjäalkiot ovat nollia. Pseudograafin vierusmatriisi määritellään vastaavasti. Sekin on symmetrinen, mutta sen kaikki lävistäjäalkiot eivät välttämättä ole nollia.

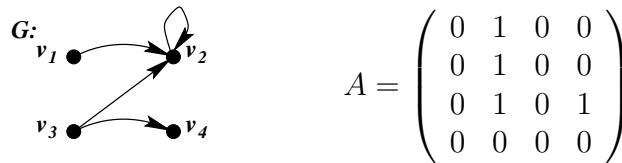


Kuva 1.30. Pseudograafi G ja graafin G vierusmatriisi A .

Määritelmä 1.40. Olkoon $G = (V, E)$ suunnattu n -solmuinen multigraafi. Merkitään $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Silloin graafin G vierusmatriisi A on $n \times n$ -matriisi, jossa

$$a_{ij} = \text{särmien lukumäärä solmusta } v_i \text{ solmuun } v_j.$$

Suunnatun graafin vierusmatriisi ei välttämättä ole symmetrinen eivätkä sen kaikki lävistäjäalkiot välttämättä ole nollia.



Kuva 1.31. Suunnattu graafi G ja graafin G vierusmatriisi A .

Määritelmä 1.41. Olkoon $G = (V, E)$ n -solmuinen m -särmäinen suuntaamaton graafi. Merkitään $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. Silloin graafin G tapausmatriisi (*incidence matrix*) C on sellainen $n \times m$ -matriisi, jossa

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos särmä } e_j \text{ kulkee solmun } v_i \text{ kautta,} \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$



Kuva 1.32. Suuntaamaton graafi G ja graafin G tapausmatriisi C .

Koska multigraafissa kukin särmä yhdistää kaksi eri solmua, multigraafin tapausmatriisiin kunkin pystyriivin alkoioiden summa on kaksi. Pseudograafissa pystyriivin summa voi olla myös yksi. Multigraafin tapausmatriisiin vaakarivien alkoioiden summa antaa kyseistä vaakariviä vastaavan solmun asteen. Pseudograafin astelukuja laskettaessa on huomioitava, että kukin luuppi lisää tapausmatriisiin vaakarivisummaa vain yhdellä. Moninkertaiset särmät tulkitaan nyt siis eri särmiksi.

1.9 Isomorfisuus

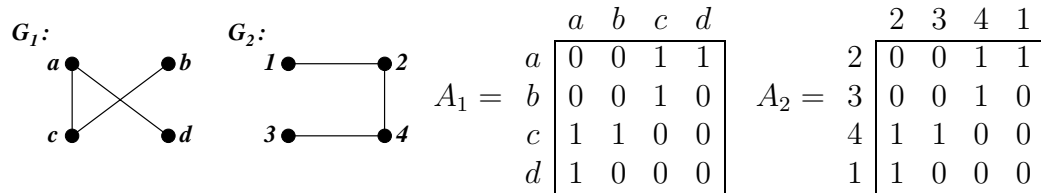
Jos kaksi graafia ovat muuten samoja, mutta niiden solmut tai särmät on nimetty erilailla, nämä graafit voidaan usein samastaa. Tällaisia graafeja sanotaan isomorfisiksi.

Määritelmä 1.42. Olkoot $G_1 = (V_1, E_1)$ ja $G_2 = (V_2, E_2)$ yksinkertaisia graafeja. Silloin graafeja G_1 ja G_2 sanotaan *isomorfisiksi* (*isomorphic*), jos on olemassa sellainen kuvaus $f: V_1 \rightarrow V_2$, että

- (i) f on bijektio,
- (ii) f säilyttää solmujen vierekkyyden, ts. solmut u ja v ($u, v \in V_1$) ovat vierussolmuja graafissa G_1 täsmälleen silloin, kun solmut $f(u)$ ja $f(v)$ ovat vierussolmuja graafissa G_2 .

Kuvausta f kutsutaan *isomorfiakuvaukseksi*.

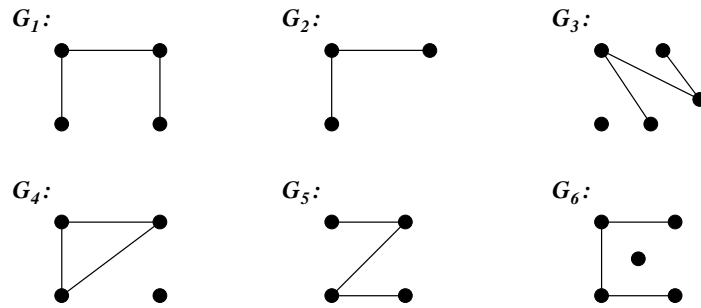
Esimerkki 1.13. Kuvan 1.33 graafit G_1 ja G_2 ovat isomorfiset. Isomorfiakuvaus f on nyt esimerkiksi $f(a) = 2$, $f(b) = 3$, $f(c) = 4$ ja $f(d) = 1$. Selvästikin f on bijektio. Lisäksi f säilyttää solmujen vierekkyyden, sillä graafien G_1 ja G_2 vierusmatriisit ovat samat (kun graafin G_2 solmut on järjestetty isomorfiakuvauksen ilmoittamalla tavalla).



Kuva 1.33. Isomorfiset graafit G_1 ja G_2 sekä niiden vierusmatriisit A_1 ja A_2 .

Graafien todistaminen isomorfisiksi on joskus työlästä. Sen sijaan graafien todistaminen ei-isomorfisiksi voi olla helppoa tarkastelemalla esimerkiksi solmujen tai särmien lukumääriä tai astelukuja.

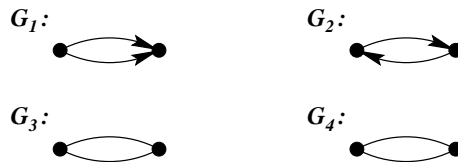
Esimerkki 1.14. Kuvassa 1.34 graafit G_1 ja G_5 ovat keskenään isomorfisia. Samoin graafit G_3 ja G_6 ovat keskenään isomorfisia. Sen sijaan kolmisolmuinen graafi G_2 sekä graafi G_4 , jossa kolmen solmun aste on 2, eivät ole kuvan 1.34 minkään muun graafin kanssa isomorfisia.



Kuva 1.34. Yksinkertaisia graafeja.

Multi- ja pseudograafien isomorfisuus määritellään vastaavasti. Vierekkyyden säilyminen vain edellyttää lisäksi, että isomorfiakuvauksessa f myös särmien moninkertaisuus säilyy. Suunnattujen graafien isomorfisuus määritellään muuten vastaavasti kuin pseudograafien isomorfisuus, mutta lisäksi särmien suuntien täytyy säilyä isomorfiakuvauksessa.

Esimerkki 1.15. Kuvassa 1.35 graafit G_1 ja G_2 eivät ole isomorfisia, koska solmuilla on eri tuloasteet. Sen sijaan vastaavat suuntaamattomat graafit G_3 ja G_4 ovat isomorfisia.



Kuva 1.35. Kaksisolmuisia ja kaksisärmäisiä graafeja.

Luku 2

Yhtenäisyys

Kuten jo edellisen luvun esimerkeistä olemme nähneet, osassa graafeja päästään särkeä pitkin kulkemalla mistä tahansa solmusta mihin tahansa solmuun. Kyseinen ominaisuus onkin keskeinen useissa graafien sovelluksissa kuten esimerkiksi mallinnettaessa tietoverkkoja graafien avulla.

2.1 Polku

Intuitiivisella tasolla yhtenäisellä graafilla tarkoitetaan graafia, jonka kaikki solmut ovat jollakin tavalla yhdistetyt toisiinsa särkeä käyttäen. Seuraavassa tarkastelemme graafin yhtenäisyyttä kuitenkin täsmällisemmin, joten tarkastelemme ensin kahden solmun välistä ”yhteyttä”.

Määritelmä 2.1. *Polku eli reitti (path, walk)* suuntaamattoman graafin G solmusta u solmuun v on äärellinen jono

$$u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_m, v_m = v,$$

jossa on vuorotellen graafin G solmuja ja särkeä siten, että e_k on solmujen v_{k-1} ja v_k välinen särmä. Solmu u on polun *alkusolmu (initial vertex)* ja solmu v polun *loppusolmu (terminal vertex)*.

Polulle solmusta u solmuun v voidaan käyttää merkintää

$$p: u \rightarrow v.$$

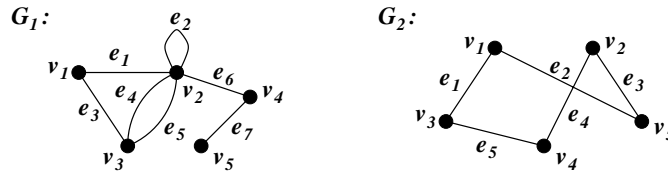
Koska särkeä päätösolmut ovat yksikäsitteiset, polku voidaan antaa myös pelkästään särkeäjonona. Yksinkertaisessa graafissa polku voidaan antaa myös pelkästään solmujonona. Tällöin polulle voidaan käyttää myös merkintää

$$p: v_0, v_1, \dots, v_m.$$

Määritelmä 2.2. Polun *pituus* (*length*) on sen särmien lukumäärä. Painotetun graafin polun pituus on polun särmien painojen summa.

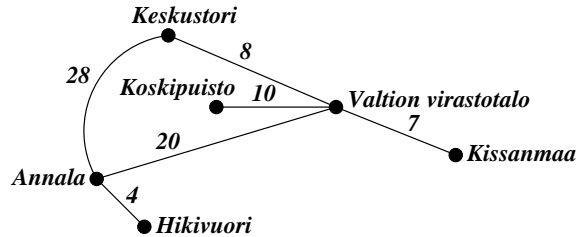
Tyhjä polku on polku, jonka pituus on nolla. Kyseinen polku on siis vain solmu, joka on sekä polun alku- että loppusolmu. Kustakin graafin solmusta on siis aina vähintään yksi polku solmuun itseensä.

Esimerkki 2.1. Kuvan 2.1 graafeissa G_1 ja G_2 on molemmissa polku $v_1 \rightarrow v_5$. Esimerkiksi graafissa G_1 jono $v_1, e_1, v_2, e_2, v_2, e_4, v_3, e_3, v_1, e_3, v_3, e_5, v_2, e_6, v_4, e_7, v_5$, e_7, v_4, e_7, v_5 on polku $v_1 \rightarrow v_5$, jonka pituus on 10. Graafissa G_2 solmujono $v_1, v_3, v_4, v_2, v_5, v_1, v_3, v_1, v_5$ on polku $v_1 \rightarrow v_5$, jonka pituus on 8.



Kuva 2.1. Yksinkertaiset graafit G_1 ja G_2 .

Esimerkki 2.2. Kuvan 2.2 graafissa polun Kissanmaa \rightarrow Hikivuori pituus on 47, kun kyseessä on polku Kissanmaa, Valtion virastotalo, Keskustori, Annala, Hikivuori, ja 31, kun kyseessä on polku Kissanmaa, Valtion virastotalo, Annala, Hikivuori.



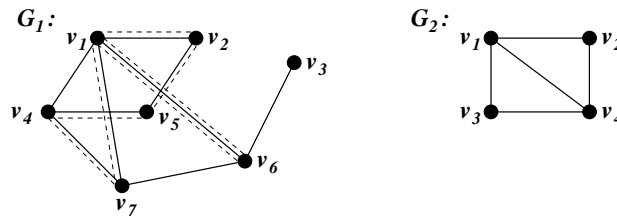
Kuva 2.2. Linja-auton matka-aika minuutteina joidenkin pysähtymispaikkojen välillä.

Määritelmä 2.3. Polku on *piiri* (*circuit, closed walk*), jos sen alku- ja loppusolmu ovat samat ja siinä on vähintään yksi särmä. Polku tai piiri on *yksinkertainen* (*simple path, trail*), jos jokaista särmää käytetään korkeintaan kerran. Polku on *suora* (*path, open path*), jos mikään solmu ei esiinny siinä kahta kertaa. *Silmukka* (*circuit*) on yksinkertainen piiri, jossa mikään solmu ei esiinny kahta kertaa muuten kuin päätesolmuna.

Suora polku on aina myös yksinkertainen polku. Erityisesti on syytä huomata, että tyhjä polku on aina suora polku.

Esimerkki 2.3. Kuvan 2.3 graafissa G_1 on piiri $v_1, v_2, v_5, v_4, v_7, v_1, v_6, v_1$. Yksinkertaisia polkuja ovat esimerkiksi solmujono v_1 ja v_1, v_4, v_7 . Solmujono v_1, v_7, v_6, v_1 puolestaan on yksinkertainen piiri.

Esimerkki 2.4. Kuvan 2.3 graafissa G_2 solmusta v_1 solmuun v_4 on kolme suoraa polkua, nimittäin polku v_1, v_4 , polku v_1, v_2, v_4 ja polku v_1, v_3, v_4 . Suora polku ei siis tarkoita mahdollisimman lyhyttä polkua.



Kuva 2.3. Yksinkertaiset graafit G_1 ja G_2 .

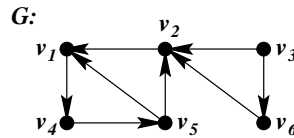
Esimerkki 2.5. Kuvan 2.3 graafissa G_2 piiri v_1, v_2, v_4, v_1 on silmukka, mutta piiri v_1, v_2, v_1 ei ole silmukka.

Jatkossa ehto ”piirissä ei esiinny sama solmu kahdesti” tarkoittaa, että se ei esiinny kahdesti paitsi päätesolmuna.

Silmukka on nyt määritelty kahdella tavalla (määritelmä 1.21 ja määritelmä 2.3). Määritelmän 2.3 mukaan silmukassa C_n on $2n$ eri silmukkaa, joissa jokaisessa on kaikki silmukan C_n solmut ja särmät. Usein nämä kaikki silmukat voidaan samaistaa ongelmitta. Kun lasketaan silmukan solmujen lukumäärää, tarkoitetaan yleensä määritelmän 1.21 mukaista silmukkaa eli alku/loppu -solmua ei lasketa kahdesti. Ainoastaan, jos on korostetusti kyse silmukasta polkuna, alku/loppu -solmu lasketaan kahdesti.

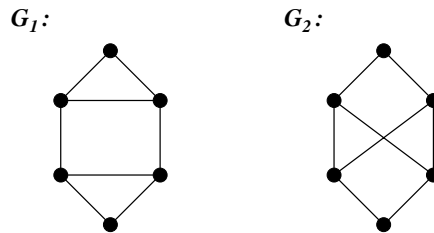
Määritelmä 2.4. Suunnatussa graafissa polku (ja sen erikoistapaukset) määritellään samoin kuin suuntaamattomassakin, mutta särmiä voi kulkea vain niiden suunnan mukaisesti.

Esimerkki 2.6. Kuvan 2.4 graafissa on suunnattu polku $v_3, v_6, v_2, v_1, v_4, v_5, v_2, v_1$, yksinkertainen polku $v_3, v_6, v_2, v_1, v_4, v_5, v_1$, suora polku v_3, v_6, v_2, v_1 , piiri $v_2, v_1, v_4, v_5, v_1, v_4, v_5, v_2$ ja silmukka v_1, v_4, v_5, v_1 .



Kuva 2.4. Suunnattu graafi G .

Esimerkki 2.7. Polkuja ja piirejä voidaan hyödyntää isomorfisuuden tutkimisessä. Kuvan 2.5 graafeissa on yhtä monta solmua ja särmää. Lisäksi kummassakin graafissa neljän solmun aste on 3 ja kahden solmun aste on 2. Graafit eivät kuitenkaan ole isomorfiset, sillä graafista G_1 löytyy kolmisärmäinen silmukka, mutta graafissa G_2 tällaista silmukkaa ei ole.

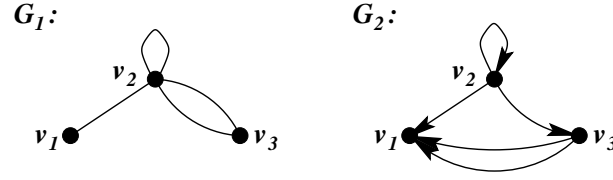


Kuva 2.5. Graafit G_1 ja G_2 eivät ole isomorfiset.

Lause 2.1. *Olkoon G suunnattu tai suuntaamaton graafi, jonka vierusmatriisi on A solmujen järjestyksen v_1, v_2, \dots, v_n suhteen. Silloin matriisin A^r alkio $[A^r]_{ij}$ antaa graafin G r -särmäisten polkujen lukumäärän solmusta v_i solmuun v_j .*

Todistus. Todistamme lauseen induktiolla polun pituuden r suhteen. Jos $r = 0$, niin $A^0 = I$ (eli identtinen matriisi). Selvästikin I_{ij} antaa tyhjien polkujen (pituus on nolla) lukumäärän.

Olkoon $B = A^r$ ja oletetaan, että b_{ik} antaa r -särmäisten polkujen lukumäärän solmusta v_i solmuun v_k . Toisaalta matriisin A alkio a_{kj} antaa särmien lukumäärän solmusta v_k solmuun v_j . Siis sellaisia $(r + 1)$ -särmäisiä polkuja solmusta v_i solmuun v_j , joiden viimeinen särmä on $\{v_k, v_j\}$, on tuloperiaatteen nojalla $b_{ik}a_{kj}$ kappaletta. Kaikkien $(r + 1)$ -särmäisten polkujen lukumäärä solmusta v_i solmuun v_j saadaan, kun käydään läpi kaikki graafin solmut v_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Siis $(r + 1)$ -särmäisiä polkuja on yhteensä $b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \dots + b_{in}a_{nj}$ kappaletta. Toisaalta matriisin $A^{r+1} = BA$ alkio $[A^{r+1}]_{ij}$ on myös $b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \dots + b_{in}a_{nj}$. \square



Kuva 2.6. Pseudograafi G_1 ja suunnattu multigraafi G_2 .

Esimerkki 2.8. Kuvan 2.6 pseudograafin G_1 yksi-, kaksi- ja kolmisärmäisten polkujen lukumäärät eri solmujen välillä saadaan kätevästi lauseen 2.1 mukaan laskemalla vierusmatriisi A ja sen potenssit A^2 ja A^3 . Siis

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 6 & 11 & 12 \\ 2 & 12 & 4 \end{pmatrix}.$$

Esimerkki 2.9. Lausetta 2.1 voidaan soveltaa myös suunnatuille graafeille. Niinpä kuvan 2.6 suunnatun multigraafin G_2 yksi-, kaksi- ja kolmisärmäisten polkujen lukumäärät eri solmujen välillä saadaan nytkin laskemalla vierusmatriisi A ja sen potenssit A^2 ja A^3 . Siis

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kuten matriiseista A^2 ja A^3 havaitaan, kahden tai useamman särmän mittaisia polkuja on vain solmusta v_2 muihin solmuihin. Lisäksi polkujen lukumäärä pysyy samana polkujen pituuden kasvaessa.

Lause 2.2. Jos graafissa on polku solmusta u solmuun v , graafissa on myös suora polku solmusta u solmuun v .

Todistus. Oletetaan, että solmusta u on olemassa polku solmuun v . Todistamme lauseen muodossa: on olemassa lyhin (ei välttämättä yksikäsitteinen) polku solmusta u solmuun v ja tämä polku on suora.

Koska polun pituus on ei-negatiivinen kokonaisluku, solmujen u ja v välillä on olemassa lyhin polku $p: u = v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, e_n, v_n = v$, missä $n \in \mathbb{N}$ on polun pituus. Voimme jatkossa jättää särmät luettelematta, sillä polun pituuteen ei vaikuta se, mitä samojen solmujen välillä olevaa särmää kuljetaan. Tehdään vasta oletus, että polku p ei ole suora. Silloin siinä esiintyy sama solmu ainakin kahdesti eli on olemassa sellaiset indeksit i ja j , että $0 \leq i < j \leq n$ ja $v_i = v_j$. Nyt

solmujono, josta on poistettu solmut $v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j$ on lyhintä polkua lyhyempi polku $u \rightarrow v$, mikä on mahdotonta. Siis ainakin lyhin polku kahden solmun välillä on suora. □

Lause 2.3. *Jos graafissa on yksinkertainen piiri, siinä on myös silmukka.*

Todistus. Lause todistetaan, kuten lause 2.2, mutta lisäksi oletetaan, että $u = v$. □

Määritelmä 2.5. Graafi on *silmukaton* (*acyclic*), jos siinä ei ole yhtään silmukkaa.

Kaikki silmukattomat graafit ovat yksinkertaisia graafeja.

Lause 2.4. *Graafi on silmukaton täsmälleen silloin, kun siinä ei ole luppeja ja minkään kahden solmun välillä ei ole kahta eri suoraa polkua.*

Todistus. Oletamme ensiksi, että graafi on silmukaton. Koska luuppi on silmukka, niin graafissa ei voi olla luppeja. Tehdään vastaoletus, että kahden solmun u ja v välillä on kaksi eri suoraa polkua $u = u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$ ja $u = v_0, d_1, v_1, d_2, \dots, v_{m-1}, d_m, v_m = v$. Olkoon i pienin sellainen indeksi, että särmä $e_i \neq d_i$. Tällöin $u_{i-1} = v_{i-1}$. Olkoon j pienin sellainen indeksi, että $j \geq i$ ja että on olemassa sellainen l , että $u_j = v_l$. Nyt polku $u_{i-1}, e_i, u_i, e_{i+1}, u_{i+1}, \dots, u_j, d_l, v_{l-1}, d_{l-1}, \dots, v_{i-1}$ on silmukka, joten graafi ei ole silmukaton. Mutta tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa, joten silmukattomassa graafissa ei kahden solmun välillä voi olla kahta eri suoraa polkua.

Oletamme seuraavaksi, että graafissa ei ole luppeja eikä kahden solmun välillä ole kahta eri suoraa polkua. Teemme vastaoletuksen, että graafissa on kuitenkin ainakin yksi silmukka $u = u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, u_{n-1}, e_n, u_n = u$. Jos $n = 1$, tämä silmukka on luuppi, mikä on mahdotonta. Jos $n \geq 2$, polut u_0, e_1, u_1 ja $u_n, e_n, u_{n-1}, \dots, e_2, u_1$ ovat eri suoria polkuja solmusta u solmuun u_1 , joten kahden solmun välillä on kaksi eri suoraa polkua, mikä myöskin on mahdotonta. Siis graafissa ei voi olla silmukoita. □

Lauseet 2.2, 2.3 ja 2.4 ovat voimassa myös suunnatuille graafeille. (Totea.)

2.2 Lyhin painotettu polku

Lyhimmän painotetun polun etsiminen painotetusta graafista on yksi algoritmisen graafiteorian klassisista ongelmista. Tässä luvussa esitämme esimerkinomaisesti *Dijkstran algoritmin*, jonka avulla voidaan löytää lyhin painotettu polku tiettyjen solmujen väliltä. Algoritmi on varsin tehokas verrattuna lyhimmän polun etsimiseen kokeilemalla. (Totea.)

Algoritmi 2.1 (Dijkstran algoritmi). Lyhin painotettu polku solmusta a solmuun z graafissa $G = (V, E)$ voidaan etsiä seuraavasti. Algoritmin askelissa päivitetään ”saavutettujen” solmujen joukkoa S ($S \subseteq V$) ja kaikkien joukon $V \setminus S$ solmujen indeksointia. Kunkin solmun v indeksi koostuu tällöin kahdesta osasta: etäisyysosasta $L(v)$ ja polkuosasta. Indeksikirjoitetaan esimerkiksi muodossa: etäisyys(polku).

Dijkstran algoritmi on seuraava (täsmällinen toteutus, ks. esimerkiksi Rosen [15], s. 471). Ensin alustustoimenpiteet.

1. $S = S_0 = \emptyset$.
2. $L(a) = 0$ ja $L(v) = \infty$ aina, kun $v \neq a$. Kaikkien solmujen polkuosaksi asetetaan tyhjä polku.

Sen jälkeen toistetaan seuraavia askelia kunnes $z \in S$. Indeksikirjoitus k ilmoittaa, monesko kierros on menossa.

1. Lisätään joukkoon S solmu (sanokaamme solmu u), jonka etäisyysosa $L(u)$ on pienin joukkoon S kuulumattomista solmuista. Siis $S = S_k = S_{k-1} \cup \{u\}$.
2. Päivitetään kunkin joukkoon S kuulumattoman solmun v indeksointi siten, että uusi etäisyysosa on

$$L_k(v) = \min\{L_{k-1}(v), L_{k-1}(u) + w(u, v)\},$$

missä $L_{k-1}(v)$ on solmun v entinen etäisyysosa, $L_{k-1}(u)$ on solmun u etäisyysosa ja $w(u, v)$ on solmujen u ja v välisen särmän paino. Mikäli solmujen u ja v välillä ei ole särmää, paino tulkitaan äärettömäksi. Solmun v uudeksi polkuosaksi asetetaan (riippuen siitä tehtiinkö etäisyysosaan muutoksia) joko entinen tai solmun u polkuosa lisättynä solmujen u ja v välisellä särmällä (itse asiassa siis vastaavalla solmumerkinnällä).

Siis joukkoon S kuulumattomien solmujen indeksointia muutetaan niin, että

- Etäisyysosa kertoo koko ajan solmun a ja päivitettävän solmun välisen lyhimmän etäisyyden, kun käytetään vain joukon S solmuja ja päivitettävää solmua (ja ko. solmujen välisiä särmiä).
- Polkuosa antaa etäisyysosaa vastaavan polun solmun a ja päivitettävän solmun välillä.

Lause 2.5. *Dijkstran algoritmi tuottaa lyhimmän kahden solmun välisen painotetun polun.*

Todistus. Sivuuetaan. Ks. esimerkiksi Rosen [15], s. 473.

□

Lyhin polku kahden solmun välillä ei välttämättä ole yksikäsitteinen. Dijkstran algoritmin tulos (polku, ei polun pituus) riippuu joissakin tapauksissa siitä, miten tietyt tekniset yksityiskohdat toteutetaan, esimerkiksi mikä solmu valitaan, jos on useita ”pienimpiä” etäisyyksiä.

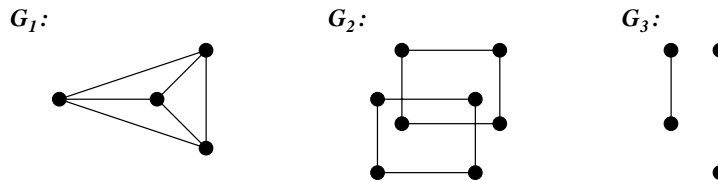
2.3 Yhtenäinen graafi

Seuraavaksi voimmekin jo määritellä täsmällisesti, mitä yhtenäisellä graafilla tarkoitetaan.

Määritelmä 2.6. Kaksi graafin solmua ovat *yhdistetyt* (*connected*), jos niiden välillä on polku.

Määritelmä 2.7. Suuntaamaton graafi on *yhtenäinen* (*connected*), jos sen mitkä tahansa kaksi solmua ovat yhdistetyt.

Jokainen solmu on yhdistetty itseensä tyhjän polun kautta. Yhtenäisessä suuntaamattomassa graafissa jokaisen kahden solmun välillä on suora polku.



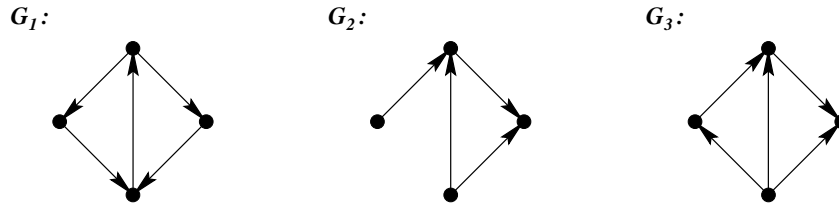
Kuva 2.7. Graafi G_1 on yhtenäinen, mutta graafit G_2 ja G_3 ovat epäyhtenäisiä.

Määritelmä 2.8. Suunnattu graafi on *heikosti yhtenäinen* (*weakly connected*), jos vastaava suuntaamaton graafi on yhtenäinen.

Määritelmä 2.9. Suunnattu graafi on *vahvasti yhtenäinen* (*strongly connected*), jos graafin jokaisen kahden solmun u ja v välillä on polku sekä solmusta u solmuun v että solmusta v solmuun u .

Määritelmä 2.10. Suunnattu graafi on *kvasivahvasti yhtenäinen* (*quasi-strongly connected*), jos graafin jokaista kahta solmua u ja v kohti löytyy sellainen graafin solmu w , että solmusta w on suunnattu polku sekä solmuun u että solmuun v .

Selvästikin vahvasti yhtenäinen graafi on myös kvasivahvasti yhtenäinen ja edelleen kvasivahvasti yhtenäinen graafi on samalla heikosti yhtenäinen.



Kuva 2.8. Graafi G_1 on vahvasti yhtenäinen graafi, graafi G_2 on heikosti yhtenäinen graafi ja graafi G_3 on kvasivahvasti yhtenäinen graafi.

Lause 2.6. Olkoon G jokin n -solmuinen yksinkertainen graafi. Jos graafin G minimiaste

$$\delta(G) \geq \frac{1}{2}(n - 1),$$

niin G on yhtenäinen.

Todistus. Tehdään vastaoletus, että $G = (V, E)$ ei ole yhtenäinen. Siis graafissa G on olemassa sellaiset solmut u ja v , että niiden välillä ei ole polkua. Siis erityisesti kaikkien solmuista u ja v lähtevien särmien toinen päätesolmu on joukossa $V \setminus \{u, v\}$. Solmuista u ja v lähtee yhteensä vähintään $\frac{1}{2}(n - 1) + \frac{1}{2}(n - 1) = n - 1$ särmää. Koska joukossa $V \setminus \{u, v\}$ on yhteensä $n - 2$ eri solmua, ainakin yhteen sen solmuun $w \in V \setminus \{u, v\}$ tulee laatikkoperiaatteen nojalla kaksi särmää solmuista u ja v . Koska graafi on yksinkertainen, sekä solmujen u ja w että v ja w välillä on särmä. Siis solmujen u ja v välillä on polku u, w, v , mikä on ristiriidassa vastaoletuksen kanssa.

□

Lause 2.7. *Olkoon G yhtenäinen suuntaamaton graafi ja k sen suorien polkujen suurin pituus. Tällöin jokaisella kahdella graafin G k -särmäisellä suoralla polulla on ainakin yksi yhteinen solmu.*

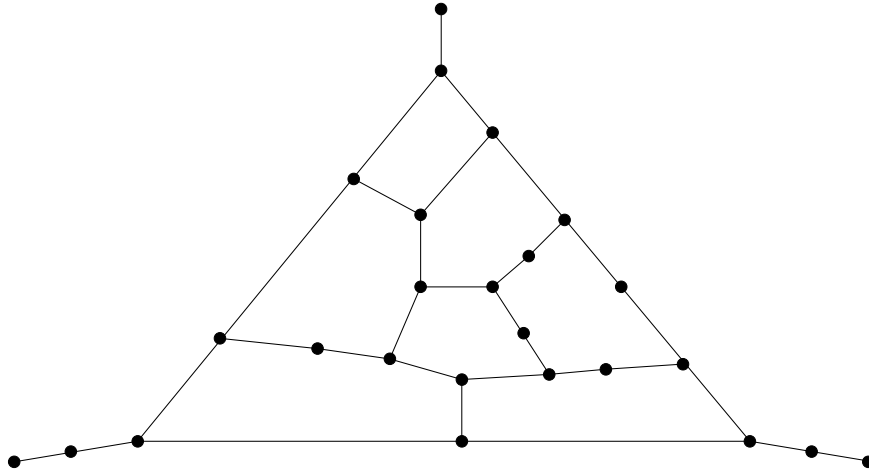
Todistus. Jos $k = 0$, kyseessä on triviaali graafi ja väite on tosi. Voidaan siis olettaa, että $k \geq 1$. Olkoot $p_1: u_0, u_1, \dots, u_k$ ja $p_2: v_0, v_1, \dots, v_k$ kaksi graafin pisintä suoraa polkua. Särmät voidaan jättää luettelematta, sillä ne eivät ole tämän todistuksen kannalta merkityksellisiä.

Tehdään vasta oletus, että $u_i \neq v_j$ aina, kun $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$. Koska G on yhtenäinen, solmusta u_0 on suora polku solmuun v_k . Olkoon u_m viimeinen tämän polun solmu, joka on polun p_1 solmu, ja v_n ensimmäinen tämän polun solmu, joka on polun p_2 solmu. Olkoon edelleen $u_m = w_0, w_1, \dots, w_l = v_n$ kyseisen polun solmujen u_m ja v_n välinen osuus. Koska $u_m \neq v_n$, niin $l > 0$.

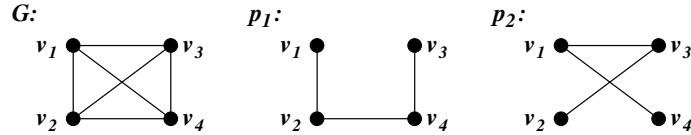
Jos $m \geq n$, niin suoran polun $u_0, \dots, u_m, w_1, \dots, w_l, v_{n+1}, \dots, v_k$ pituus on $m + l + (k - n) = k + (m - n) + l$. Edelleen $k + (m - n) + l > k$, sillä $m \geq n$ ja $l > 0$. Jos taas $m < n$, suoran polun $v_0, \dots, v_n, w_{l-1}, \dots, w_0, u_{m+1}, \dots, u_k$ pituus on $n + l + (k - m) = k + (n - m) + l$. Lisäksi $k + (n - m) + l > k$, sillä $n > m$ ja $l > 0$. Kummassakin tapauksessa löydettiin siis pisintä polkua pidempi polku eli päädyttiin ristiriitaan.

□

Graafissa ei kuitenkaan välttämättä ole solmua, joka olisi yhteinen kaikille sen pisimmille suorille poluille (ks. kuva 2.9). Myöskään pisimmillä suorilla poluilla ei välttämättä ole yhteisiä särmäitä (ks. kuva 2.10).



Kuva 2.9. Waltherin [18] esittämä graafi, jossa mikään graafin solmu ei ole yhteinen graafin kaikille pisimmille poluille.



Kuva 2.10. Graafin G pisimmillä suorilla poluilla p_1 ja p_2 ei ole yhteisiä särmää.

Lause 2.8. *Olkoon $G = (V, E)$ yhtenäinen graafi. Jos $e \in E$ on graafin G jonkin silmukan särmä, myös graafi $G - e$ on yhtenäinen.*

Todistus. Olkoon $e = \{u, v\}$ graafin G silmukan $v, u_1, \dots, u_{n-2}, u, v$ särmä (todistuksen yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa, että silmukan esityksessä särmä e on viimeisenä). Nyt $p: v, u_1, \dots, u_{n-2}, u$ on graafin G polku, joka ei sisällä särmää e . Siis p on myös graafin $G - e$ polku.

Tehdään nyt vastaoletus, että graafi $G - e$ ei ole yhtenäinen. Siis graafissa $G - e$ on solmut u' ja v' , joiden välillä ei ole polkua (graafissa $G - e$). Toisaalta G on yhtenäinen, joten graafissa G on (suora) polku solmujen u' ja v' välillä. Edelleen tämä polku sisältää särmän e täsmälleen kerran. Olkoon tämä polku esimerkiksi

$$v', v_1, \dots, v_k, v, u, v_{k+3}, \dots, v_{l-1}, u'.$$

(Koska G on suuntaamaton, voidaan olettaa, että solmu v esiintyy polussa ennen solmua u .) Mutta nyt

$$v', v_1, \dots, v_k, v, u_1, \dots, u_{n-2}, u, v_{k+3}, \dots, v_{l-1}, u'$$

on graafin $G - e$ polku, mikä on ristiriidassa vastaoletuksen kanssa.

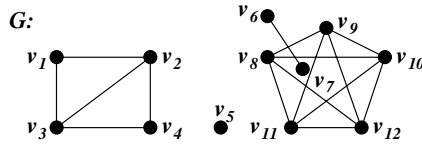
□

2.4 Komponentti

Vaikka graafi ei olisikaan yhtenäinen, jotkin sen aligraafeista ovat tietenkin yhtenäisiä. Itse asiassa epäyhtenäisen graafin voidaan ajatella koostuvan useasta graafin yhtenäisestä aligraafista (eli komponentista).

Määritelmä 2.11. Graafin maksimaalinen yhtenäinen aligraafi on graafin *komponentti* (*component*).

Graafin komponentti ei ole graafin minkään yhtenäisen aligraafin aito aligraafi. Yhtenäisellä graafilla on vain yksi komponentti, graafi itse; epäyhtenäisellä graafilla on useita komponentteja. Eristetty solmu muodostaa yksinään graafin yhden



Kuva 2.11. Graafissa G on neljä komponenttia.

komponentin. Särmän poistaminen lisää graafin komponenttien määrää enintään yhdellä.

Lause 2.9. *Jos graafin G solmu v on yhdistetty johonkin graafin G komponentin H solmuun, niin v on komponentin H solmu.*

Todistus. Oletetaan, että $H = (V, E)$ ja v on yhdistetty solmuun $u \in V$. Tehdään vastaoletus, että $v \notin V$. Olkoon $p: v = v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n = u$ polku, joka yhdistää solmut u ja v . Olkoon $F = (V \cup \{v_0, v_1, \dots, v_n\}, E \cup \{e_1, e_2, \dots, e_n\})$. Koska $v_0 \notin V$, komponentti H on graafin F aito aligraafi. Toisaalta F on yhtenäinen, koska H on yhtenäinen ja polku p yhdistää solmut v_0, v_1, \dots, v_n joukon V solmuihin solmun u kautta. Siis H ei ole graafin G maksimaalinen yhtenäinen aligraafi eli H ei ole komponentti.

□

Lause 2.10. *Jokainen graafin G solmu kuuluu täsmälleen yhteen graafin G komponenttiin. Samoin jokainen graafin G särmä kuuluu täsmälleen yhteen graafin G komponenttiin.*

Todistus. Osoitamme ensiksi, että graafin jokainen solmu kuuluu ainakin yhteen komponenttiin ja toiseksi, että jokainen solmu kuuluu korkeintaan yhteen komponenttiin.

Olkoon $G = (V, E)$ ja $v \in V$. Olkoon edelleen V_1 solmuun v yhdistettyjen solmujen joukko. Siis solmujoukon V_1 indusoima aligraafi $\langle V_1 \rangle$ on yhtenäinen, koska sen kaikki solmut ovat yhdistetyt toisiinsa solmun v kautta. Toisaalta $\langle V_1 \rangle$ on graafin G maksimaalinen yhtenäinen aligraafi, sillä V_1 sisältää kaikki solmuun v yhdistetyt solmut ja indusoituna graafina $\langle V_1 \rangle$ sisältää myös kaikki mahdolliset särmät. Siis $\langle V_1 \rangle$ on graafin G komponentti, johon solmu v kuuluu.

Olkoot $H = (V_1, E_1)$ ja $F = (V_2, E_2)$ sellaisia graafin G komponentteja, että $v \in V_1$ ja $v \in V_2$. Koska H ja F ovat yhtenäisiä, niin kaikki joukkojen V_1 ja V_2 solmut ovat yhdistetyt solmuun v . Siis lauseen 2.9 mukaan kaikki joukkojen V_1 ja V_2 solmut kuuluvat samaan komponenttiin kuin v , joten $H = F$.

Siis solmu v kuuluu täsmälleen yhteen graafin G komponenttiin. Koska särmä yhdistää päätesolmunsä, särmän päätesolmut kuuluvat samaan komponenttiin. Siis myös särmä kuuluu tähän samaan komponenttiin eli kukin graafin G särmä kuuluu täsmälleen yhteen graafin G komponenttiin. \square

Lauseen 2.10 todistus antaa yhden algoritmin, jolla graafi voidaan jakaa komponentteihin. Lisäksi siis komponenttien solmujoukot muodostavat graafin solmujoukon luokkajaon.

2.5 Aste ja nulliteetti

Graafin asteen ja nulliteetin merkitys tulee varsinaisesti esille vasta luvussa 3.8. Määrittelemme käsitteet kuitenkin jo nyt, jotta pystymme jo aiemmin esittämään käsitteitä koskevia aputuloksia.

Määritelmä 2.12. Olkoon G graafi, jossa on n solmua, m särmää ja k komponenttia. Tällöin graafin G *aste* (*rank*) on

$$\rho(G) = n - k$$

ja graafin G *nulliteetti* (*nullity*) on

$$\mu(G) = m - n + k.$$










Selvästikin aina $\rho(G) \geq 0$ ja $\rho(G) + \mu(G) = m$.

Lause 2.11. *Olkoon G jokin m -särmäinen graafi. Tällöin $\rho(G) \leq m$.*

Todistus. Olkoon n graafin G solmujen ja k graafin G komponenttien lukumäärä. Todistamme lauseen induktiolla särmien lukumäärän m suhteen. Jos $m = 0$, jokaisessa komponentissa on täsmälleen yksi solmu ja myös $\rho(G) = 0$.

Oletetaan nyt, että $\rho(G) \leq m$, kun särmä on korkeintaan m kappaletta, ja osoitetaan, että $\rho(G) \leq m + 1$, kun särmä on $m + 1$ kappaletta. Olkoon H jokin graafin G komponentti, jossa on särmä $e = \{u, v\}$, ja olkoon k' graafin $G - e$ komponenttien lukumäärä.

Jos $H - e$ on yhtenäinen, graafin komponenttien lukumäärä ei muutu eli $k' = k$ ja $\rho(G) = n - k = n - k' = \rho(G - e) \leq m < m + 1$. Jos taas $H - e$ ei ole yhtenäinen, siinä on kaksi komponenttia ja graafin $G - e$ komponenttien lukumäärä $k' = k + 1$. Siis $\rho(G) = n - k = n - (k' - 1) = (n - k') + 1 = \rho(G - e) + 1 \leq m + 1$.

G	$n - k = \rho(G)$	$m - \rho(G) = \mu(G)$
	$1 - 1 = 0$	$0 - 0 = 0$
	$2 - 2 = 0$	$0 - 0 = 0$
	$2 - 1 = 1$	$1 - 1 = 0$
	$3 - 3 = 0$	$0 - 0 = 0$
	$3 - 2 = 1$	$1 - 1 = 0$
	$3 - 1 = 2$	$2 - 2 = 0$
	$3 - 1 = 2$	$3 - 2 = 1$
	$4 - 1 = 3$	$4 - 3 = 1$
	$4 - 1 = 3$	$6 - 3 = 3$

Taulukko 2.1. Joidenkin graafien asteet ja nulliteetit.

Siis kummassakin tapauksessa $\rho(G) \leq m + 1$, joten alkuperäinen väite on tullut todistetuksi.

□

Lauseen 2.11 perusteella myöskin nulliteetille pätee $\mu(G) \geq 0$.

2.6 Irrotussolmu ja lohko

Sovelluksissa graafin yhtenäisyys on melko yleinen vaatimus. Joskus tämäkään ei kuitenkaan riitä vaan tarpeen on tietää, pysyykö graafi yhtenäisenä, jos siitä poistetaan yksi solmu.

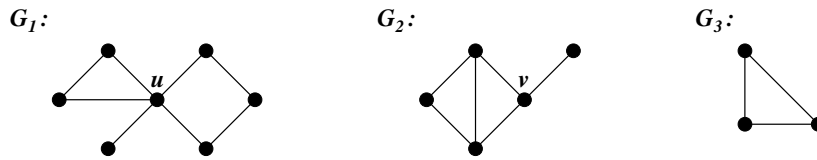
Määritelmä 2.13. Graafin G solmu v on graafin G *irrotussolmu* (*cut-vertex*), jos graafissa $G - v$ on enemmän komponentteja kuin graafissa G .

Eristetty solmu ei ole irrotussolmu, sillä eristetyn solmun poistaminen graafista vähentää graafin komponenttien lukumäärää.

Lause 2.12. Jos v on graafin G irrotussolmu, niin $G - v$ ei ole yhtenäinen.

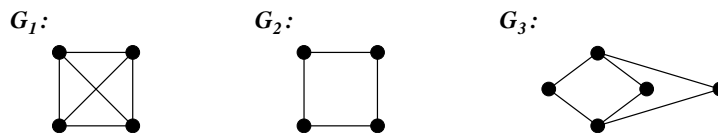
Todistus. Graafissa $G - v$ on ainakin kaksi komponenttia.

□



Kuva 2.12. Solmu u on graafin G_1 irrotussolmu ja solmu v on graafin G_2 irrotussolmu. Graafissa G_3 ei ole irrotussolmua.

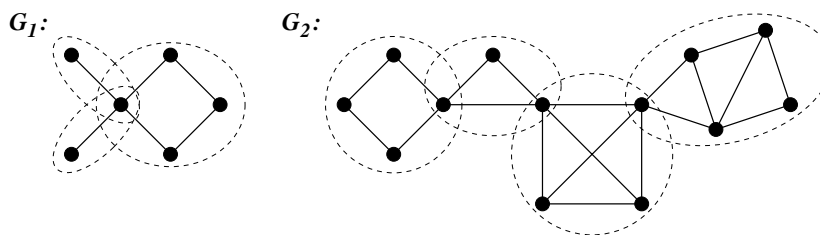
Määritelmä 2.14. Graafi on *separoituva* (*separable*), jos se on epäyhtenäinen tai sillä on ainakin yksi irrotussolmu. Muussa tapauksessa graafi on *separoitumaton* (*nonseparable*).



Kuva 2.13. Separoitumattomia graafeja.

Määritelmä 2.15. Graafin maksimaalinen separoitumaton aligraafi on graafin *lohko* (*block*).

Graafin G aligraafi H on siis graafin G lohko, jos (i) H on separoitumaton ja (ii) aina, kun F on graafin G aligraafi, joko F on graafin H aligraafi tai $H \cup F$ on separoituva. Separoitumattomalla graafilla on vain yksi lohko, graafi itse.



Kuva 2.14. Graafissa G_1 on kolme lohkoa ja graafissa G_2 on neljä lohkoa.

Lause 2.13. Graafin jokainen särmä kuuluu ainakin yhteen lohkoon.

Todistus. Olkoon $G = (V, E)$, $e \in E$ ja $e = \{u, v\}$. Menetellään seuraavasti:

1. Asetetaan $H := (\{u, v\}, \{e\})$. Tällöin H on graafin G separoitumaton aligraafi.
2. Jos H on lohko, lopetetaan.
3. Jos H ei ole lohko, on olemassa sellainen graafin G separoitumaton aligraafi F , että H on graafin F aito aligraafi. Valitaan jokin tällainen F .
4. Asetetaan $H := F$ ja jatketaan kohdasta 2.

Tämä algoritmi pysähtyy, koska kohdassa 3 graafi H on graafin F aito aligraafi. Näin ollen kohdassa 4 graafin H lisätään ainakin yksi solmu tai särmä. Algoritmin päättyessä H on lohko, jossa on särmä e . \square

Lause 2.14. *Graafin jokainen separoitumaton aligraafi on jonkin lohkon aligraafi.*

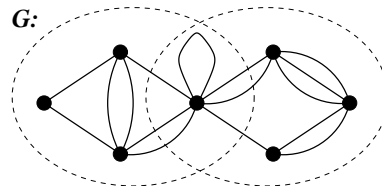
Todistus. Separoitumaton aligraafi voidaan täydentää lohkoksi lauseen 2.13 todistuksessa esitetyllä algoritmilla. \square

Seuraus 2.15. *Graafin jokainen solmu kuuluu ainakin yhteen lohkoon.*

Todistus. Solmu muodostaa yksin separoitumattoman aligraafin, joka lauseen 2.14 perusteella kuuluu johonkin lohkoon. \square

Lause 2.16. *Graafin jokainen särmä, joka ei ole luuppi, kuuluu täsmälleen yhteen lohkoon.*

Todistus. Lauseen 2.13 mukaan jokainen särmä kuuluu ainakin yhteen lohkoon. Lauseen loppuosan todistus jätetään harjoitustehtäväksi. \square



Kuva 2.15. Pseudograafissa G on kaksi lohkoa.

Solmu tai luuppi voi kuulua useampaankin lohkoon (ks. kuvat 2.14 ja 2.15).

Lause 2.17. *Solmu v on yhtenäisen graafin G irrotussolmu täsmälleen silloin, kun on olemassa kaksi sellaista graafin G eri solmua u ja w , että $u \neq v$, $w \neq v$ ja v on jokaisen solmujen u ja w välisen polun solmu.*

Todistus. Oletetaan ensiksi, että v on graafin G irrotussolmu. Siis lauseen 2.12 nojalla graafi $G - v$ ei ole yhtenäinen eli siinä on ainakin kaksi komponenttia $G_1 = (V_1, E_1)$ ja $G_2 = (V_2, E_2)$. Olkoon $u \in V_1$ ja $w \in V_2$. Selvästikin solmut v , u ja w ovat eri solmuja. Tehdään nyt vastaoletus, että on olemassa sellainen graafin G polku $p: u \rightarrow w$, että v ei ole polun p solmu. Siis p on myös graafin $G - v$ polku. Näin ollen u ja w olisivat yhdistettyjä graafissa $G - v$, mikä on mahdotonta, sillä u ja w kuuluvat graafin $G - v$ eri komponentteihin.

Oletetaan seuraavaksi, että u , v ja w ovat eri solmuja ja solmu v kuuluu jokaiseen solmujen u ja w väliseen polkuun. Siis yksikään polku solmusta u solmuun w ei ole graafin $G - v$ polku, joten solmut u ja w eivät ole yhdistetyt graafissa $G - v$. Siis graafissa $G - v$ on ainakin kaksi komponenttia eli ainakin yksi komponentti enemmän kuin yhtenäisessä graafissa G . Siis solmu v on graafin G irrotussolmu. \square

Lause 2.18. *Yhtenäinen graafi G on separoituva täsmälleen silloin, kun graafilla G on kaksi vähintään kaksisolmuista aligraafia, joilla on täsmälleen yksi yhteinen solmu ja joiden unionina saadaan graafi G .*

Todistus. Oletetaan ensiksi, että graafi $G = (V, E)$ on yhtenäinen ja separoituva. Tällöin siinä on ainakin yksi irrotussolmu v . Lauseen 2.17 perusteella on olemassa sellaiset irrotussolmusta v eroavat eri solmut u ja w , että irrotussolmu v on jokaisen solmusta u solmuun w kulkevan polun solmu. Lauseen 2.17 todistuksessa todettiin, että u ja w kuuluvat graafin $G - v$ eri komponentteihin. Olkoon $H = (W, F)$ se komponentti, johon solmu w kuuluu. Olkoot $G_1 = (V_1, E_1) = \langle W \cup \{v\} \rangle$ ja $G_2 = (V_2, E_2) = \langle V \setminus W \rangle$ graafissa G indusoituja graafin G aligraafeja.

Koska u ja w kuuluvat graafin $G - v$ eri komponentteihin, niin $w \in W$ ja $u \notin W$. Siis $v, w \in V_1$ ja $u \notin V_1$ sekä $u, v \in V_2$ ja $w \notin V_2$. Joukoissa V_1 ja V_2 on siis vähintään kaksi alkioita ja niiden leikkaus

$$V_1 \cap V_2 = (W \cup \{v\}) \cap (V \setminus W) = \{v\}.$$

Edelleen $V_1 \cup V_2 = (W \cup \{v\}) \cup (V \setminus W) = V$. Osoitetaan vielä, että särmäjoukko $E_1 \cup E_2 = E$. Koska mikään joukon $V \setminus W$ solmuista ei ole komponentin H solmu, voi joukon $V \setminus W$ solmuista ainoastaan solmusta v olla särmä joukon W solmuihin. Koska kuitenkin $v \in V_1$, mikään särmistä ei voi jäädä pois, joten $E_1 \cup E_2 = E$ eli $G_1 \cup G_2 = G$.

Oletetaan seuraavaksi, että $G_1 = (V_1, E_1)$ ja $G_2 = (V_2, E_2)$ ovat sellaisia graafin G aligraafeja, että $V_1 \cap V_2 = \{v\}$, joukoissa V_1 ja V_2 on kummassakin vähintään kaksi solmua ja $G_1 \cup G_2 = G$. Koska joukoissa V_1 ja V_2 on kummassakin vähintään kaksi solmua on olemassa sellaiset solmut $u \in V_1$ ja $w \in V_2$, että $u \neq v$ ja $w \neq v$. Koska $V_1 \cap V_2 = \{v\}$ ja $E = E_1 \cup E_2$, kaikki polut solmusta u solmuun w kulkevat solmun v kautta. Koska graafi G on yhtenäinen, solmu v on lauseen 2.17 mukaan graafin G irrotussolmu eli graafi G on separoituva. \square

Seuraus 2.19. *Yhtenäisessä separoituvassa graafissa on ainakin kolme solmua.*

Lause 2.20. *Jokaisessa vähintään kaksisolmuisessa graafissa on ainakin kaksi solmua, jotka eivät ole irrotussolmuja.*

Todistus. Todistamme lauseen induktiolla solmujen lukumäärän n suhteen. Olkoon $n = 2$. Jos solmujen välillä on särmä, toisen solmun ja särmän poistaminen pitää komponenttien määrän yhtenä, ja jos särmää ei ole, toisen solmun poistaminen vähentää komponenttien lukumäärää. Kummassakaan tapauksessa ei kumpikaan solmuista ole irrotussolmu.

Tehdään induktio-oletus, että jokaisessa korkeintaan n -solmuisessa ($n \geq 2$) graafissa on ainakin kaksi solmua, jotka eivät ole irrotussolmuja. Olkoon graafin G solmujen lukumäärä $n + 1$. Jos graafissa G ei ole irrotussolmuja, väite on tosi. Siis voidaan olettaa, että graafissa G on ainakin yksi irrotussolmu v . Nyt graafissa $G - v$ on n solmua. Olkoot G_1, G_2, \dots, G_m graafin $G - v$ komponentit. Näitä on lauseen 2.12 mukaan vähintään kaksi.

Yksisolmuisissa komponenteissa G_i komponentin ainoa solmu ei ole graafin G irrotussolmu, sillä solmusta voi olla särmä ainoastaan solmuun v . Täten solmun poistaminen ei kasvata komponenttien lukumäärää (mutta voi vähentää).

Useampisolmuisissa komponenteissa G_i solmuja on korkeintaan n kappaletta. Täten induktio-oletuksen nojalla niistä ainakin kaksi solmua u ja w eivät ole graafin G_i irrotussolmuja. Jos näistä jompikumpi ei ole solmun v vierussolmu, se ei ole myöskään graafin G irrotussolmu. Jos taas molemmat solmut u ja w ovat solmun v vierussolmuja, mutta eivät irrotussolmuja komponentissa G_i , niin toisen solmun poistaminen ei katkaise muiden solmujen yhteyttä toiseen solmuun ja sen kautta edelleen solmuun v . Täten kumpikaan solmuista u ja w ei ole graafin G irrotussolmu.

Näin ollen jokaisesta komponentista G_i löytyy ainakin yksi solmu, joka ei ole graafin G irrotussolmu. Koska komponentteja on ainakin kaksi, graafista G löytyy ainakin kaksi solmua, jotka eivät ole irrotussolmuja. \square

2.7 Irrotus ja irrotusjoukko

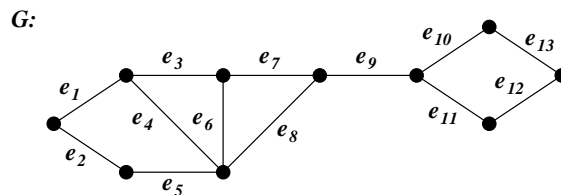
Paitsi solmuja poistamalla graafi voidaan jakaa komponentteihin myös särmiä poistamalla.

Määritelmä 2.16. Yhtenäisen graafin *irrotusjoukko* (*cutset*) on minimaalinen särmäjoukko, jonka poistaminen graafista jakaa graafin kahteen komponenttiin.

Yhtenäisen graafin $G = (V, E)$ särmäjoukko $F \subseteq E$ on siis graafin G irrotusjoukko, jos (i) $G - F$ ei ole yhtenäinen ja (ii) $G - H$ on yhtenäinen aina, kun $H \subset F$ (aito osajoukko). Graafilla voi siis olla useita irrotusjoukkoja ja irrotusjoukoissa voi olla eri määrä särmiä.

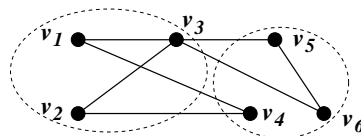
Määritelmä 2.17. Yksisärmäistä irrotusjoukkoa sanotaan *sillaksi* (*bridge*).

Esimerkki 2.10. Kuvan 2.16 graafin G irrotusjoukkoja ovat esimerkiksi joukot $\{e_1, e_5\}$, $\{e_3, e_4, e_5\}$, $\{e_7, e_8\}$ ja $\{e_9\}$. Irrotusjoukko $\{e_9\}$ on silta.



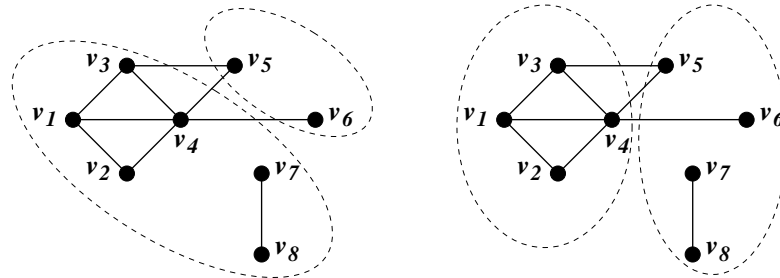
Kuva 2.16. Yksinkertainen graafi G .

Määritelmä 2.18. Olkoon $\{V_1, V_2\}$ graafin $G = (V, E)$ solmujoukon V jokin luokkajako. Tällöin niiden särmien joukko, joiden toinen päätesolmu on joukossa V_1 ja toinen joukossa V_2 , on graafin G *irrotus* (*cut*). Tälle irrotukselle käytetään merkintää $\langle V_1, V_2 \rangle$.



Kuva 2.17. Nelisärmäinen irrotus $\langle \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_4, v_5, v_6\} \rangle$.

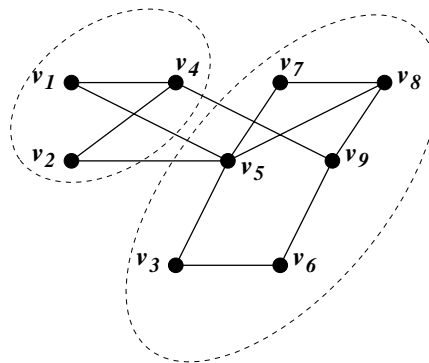
Irrotus $\langle V_1, V_2 \rangle$ on siis minimaalinen särmäjoukko, joka jakaa graafin G kahdeksi solmujoukkojen V_1 ja V_2 indusoimaksi graafiksi. Irrotuksen särmäjoukko ei kuitenkaan määrää joukkoja V_1 ja V_2 yksikäsitteisesti, joten irrotusta ei yleisesti voi esittää pelkästään luettelemalla sen särmät. Esimerkiksi kuvassa 2.18 irrotuksien $\langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8\}, \{v_5, v_6\} \rangle$ ja $\langle \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_5, v_6, v_7, v_8\} \rangle$ särmät ovat samat, mutta solmujen luokkajaot eroavat.



Kuva 2.18. Graafi, jossa kahta eri irrotusta vastaavat särmäjoukot ovat samat.

Lause 2.21. *Yhtenäisen graafin $G = (V, E)$ irrotus $\langle V_1, V_2 \rangle$ on graafin G irrotusjoukko täsmälleen silloin, kun solmujoukkojen V_1 ja V_2 indusoimat graafin G aligraafit $\langle V_1 \rangle$ ja $\langle V_2 \rangle$ ovat yhtenäisiä.*

Todistus. Oletetaan ensiksi, että irrotus $\langle V_1, V_2 \rangle$ on graafin G irrotusjoukko. Koska $\{V_1, V_2\}$ on joukon V luokkajako, joukot V_1 ja V_2 ovat erillisiä. Täten aligraafissa $\langle V_1 \rangle$ ei ole särmää joukon V_1 solmuista aligraafin $\langle V_2 \rangle$ solmuihin. Siis myös graafit



Kuva 2.19. Kolmisärmäinen irrotus $\langle \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_3, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} \rangle$. Tämä irrotus on myös irrotusjoukko.

$\langle V_1 \rangle$ ja $\langle V_2 \rangle$ ovat erillisiä. Koska graafissa $G - \langle V_1, V_2 \rangle$ on irrotusjoukon määrittelyn perusteella täsmälleen kaksi komponenttia ovat aligraafit $\langle V_1 \rangle$ ja $\langle V_2 \rangle$ nämä komponentit. Siis $\langle V_1 \rangle$ ja $\langle V_2 \rangle$ ovat yhtenäiset.

Oletetaan seuraavaksi, että solmujoukkojen V_1 ja V_2 indusoimat graafin G aligraafit $\langle V_1 \rangle$ ja $\langle V_2 \rangle$ ovat yhtenäisiä. Koska joukot V_1 ja V_2 ovat epätyhjiä ja irrotuksena $\langle V_1, V_2 \rangle$ sisältää kaikki ne särmät, joiden toinen päätesolmu on joukossa V_1 ja toinen joukossa V_2 , niin $G - \langle V_1, V_2 \rangle$ ei ole yhtenäinen.

Olkoon nyt $H \subset \langle V_1, V_2 \rangle$ ja $e \in \langle V_1, V_2 \rangle \setminus H$. Koska $e \in \langle V_1, V_2 \rangle$, niin e yhdistää jotkin joukkojen V_1 ja V_2 solmut. Toisaalta $e \notin H$, joten e on graafin $G - H$ särmä. Koska $\langle V_1 \rangle$ ja $\langle V_2 \rangle$ ovat yhtenäisiä, myös $G - H$ on yhtenäinen.

Siis $\langle V_1, V_2 \rangle$ on minimaalinen särmäjoukko, joka jakaa graafin G kahteen komponenttiin. Täten $\langle V_1, V_2 \rangle$ on graafin G irrotusjoukko. □

Lause 2.22. *Jos F on yhtenäisen graafin G irrotusjoukko ja $G_1 = (V_1, E_1)$ sekä $G_2 = (V_2, E_2)$ ovat graafin $G - F$ kaksi komponenttia, niin $F = \langle V_1, V_2 \rangle$.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että $F \neq \langle V_1, V_2 \rangle$. Tällöin on siis olemassa joko sellainen särmä $e \in \langle V_1, V_2 \rangle$, että $e \notin F$, tai sellainen särmä $e \in F$, että $e \notin \langle V_1, V_2 \rangle$.

Ensimmäisessä tapauksessa särmä e yhdistää jotkin solmut joukoista V_1 ja V_2 . Koska $e \notin F$, särmä e on graafin $G - F$ särmä. Siis särmä e yhdistää graafin $G - F$ kahden eri komponentin jotkin solmut, mikä on mahdotonta.

Jälkimmäisessä tapauksessa $G - (F \setminus \{e\})$ ei ole yhtenäinen. Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska F on irrotusjoukko ja $F \setminus \{e\}$ sen aito osajoukko. □

Lause 2.23. *Yhtenäisen graafin G irrotus on joidenkin graafin G erillisten irrotusjoukkojen unioni.*

Todistus. Olkoon $\langle V_1, V_2 \rangle$ graafin G irrotus. Todistamme induktiolla irrotuksen särmien lukumäärän n suhteen, että $\langle V_1, V_2 \rangle$ on joidenkin graafin G erillisten irrotusjoukkojen unioni.

Jos $n = 1$, irrotuksessa $\langle V_1, V_2 \rangle$ on täsmälleen yksi särmä e . Edelleen graafissa $G - e$ on täsmälleen kaksi komponenttia, koska särmän poisto lisää komponenttien lukumäärää korkeintaan yhdellä. Siis $\langle V_1 \rangle$ ja $\langle V_2 \rangle$ ovat yhtenäisiä, joten $\langle V_1, V_2 \rangle$ on lauseen 2.21 mukaan graafin G irrotusjoukko.

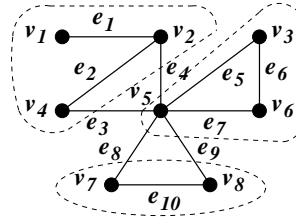
Tehdään nyt induktio-oletus, että jokainen korkeintaan n -särmäinen irrotus on joidenkin graafin G erillisten irrotusjoukkojen unioni. Olkoon $\langle V_1, V_2 \rangle$ graafin G

irrotus, jossa on $n+1$ särmää. Jos $\langle V_1, V_2 \rangle$ on graafin G irrotusjoukko, väite on tosi. Näin ollen voimme jatkossa olettaa, että $\langle V_1, V_2 \rangle$ ei ole graafin G irrotusjoukko.

Koska $\langle V_1, V_2 \rangle$ ei ole graafin G irrotusjoukko, niin lauseen 2.21 mukaan joko $\langle V_1 \rangle$ tai $\langle V_2 \rangle$ ei ole yhtenäinen. Todistuksen yleisyyttä rajoittamatta voimme olettaa, että $\langle V_1 \rangle$ ei ole yhtenäinen. Olkoot $G_1 = (U_1, F_1)$, $G_2 = (U_2, F_2)$, \dots , $G_m = (U_m, F_m)$ aligraafin $\langle V_1 \rangle$ komponentit ja olkoot E_i , ($i = 1, 2, \dots, m$) komponentin G_i ja aligraafin $\langle V_2 \rangle$ välisten särmien joukot. Koska komponentit G_i ovat erillisiä, myös särmäjoukot E_i ovat erillisiä. Lisäksi kukin joukon $\langle V_1, V_2 \rangle$ särmä yhdistää jonkin komponentin G_i aligraafin V_2 , joten särmäjoukkojen E_i unioni on $\langle V_1, V_2 \rangle$.

Joukot E_i ovat siis erillisiä ja niiden unioni on irrotus $\langle V_1, V_2 \rangle$. Edelleen jokainen E_i on korkeintaan n -särmäinen graafin G irrotus $\langle U_i, V \setminus U_i \rangle$, sillä $m \geq 2$ ja $E_i \neq \emptyset$. Siis induktio-oletuksen mukaan ne ovat erillisten irrotusjoukkojen unionia. Näin ollen $\langle V_1, V_2 \rangle$ on erillisten erillisten irrotusjoukkojen unionien unioni eli erillisten irrotusjoukkojen unioni.

□



Kuva 2.20. Irrotus $\{e_3, e_4, e_8, e_9\}$ on erillisten irrotusjoukkojen $\{e_3, e_4\}$ ja $\{e_8, e_9\}$ unioni.

Lause 2.24. Graafin G kahden eri irrotuksen symmetrinen erotus on graafin G irrotus.

Todistus. Olkoot $E_1 = \langle V_1, V_2 \rangle$ ja $E_2 = \langle V_3, V_4 \rangle$ kaksi graafin $G = (V, E)$ eri irrotusta. Nyt

$$V_1 \cup V_2 = V_3 \cup V_4 = V$$

ja

$$V_1 \cap V_2 = V_3 \cap V_4 = \emptyset.$$

Olkoon $A = V_1 \cap V_3$, $B = V_1 \cap V_4$, $C = V_2 \cap V_3$ ja $D = V_2 \cap V_4$. On helppo osoittaa, että joukot A , B , C ja D ovat parittain erillisiä. Nyt

$$E_1 = \langle V_1, V_2 \rangle = \langle A \cup B, C \cup D \rangle = \langle A, C \rangle \cup \langle A, D \rangle \cup \langle B, C \rangle \cup \langle B, D \rangle$$

ja

$$E_2 = \langle V_3, V_4 \rangle = \langle A \cup C, B \cup D \rangle = \langle A, B \rangle \cup \langle A, D \rangle \cup \langle B, C \rangle \cup \langle C, D \rangle,$$

joten symmetrinen erotus

$$\begin{aligned} E_1 \oplus E_2 &= \langle A, B \rangle \cup \langle A, C \rangle \cup \langle B, D \rangle \cup \langle C, D \rangle \\ &= \langle A, B \rangle \cup \langle A, C \rangle \cup \langle D, B \rangle \cup \langle D, C \rangle \\ &= \langle A \cup D, B \cup C \rangle. \end{aligned}$$

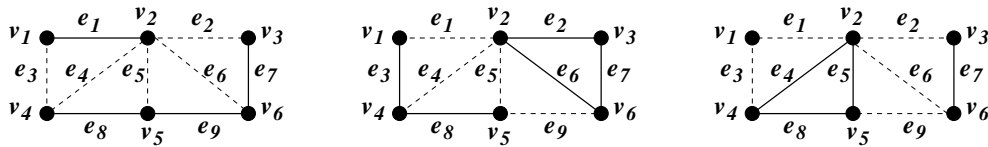
Koska joukot $A \cup D$ ja $B \cup C$ ovat erillisiä, epätyhjiä (koska E_1 ja E_2 ovat eri irrotuksia) ja niiden unioni $A \cup D \cup B \cup C = V$, symmetrinen erotus $E_1 \oplus E_2$ on graafin G irrotus.

□

Seuraus 2.25. Graafin G kahden erillisen irrotuksen unioni on graafin G irrotus.

Todistus. Kahden erillisen joukon symmetrinen erotus on sama kuin niiden unioni.

□



Kuva 2.21. Irrotus $\{e_1, e_2, e_3, e_6, e_9\}$ on irrotusten $\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ ja $\{e_1, e_4, e_5, e_9\}$ symmetrinen erotus.

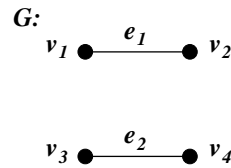
Pelkkä särmäjoukko ei välttämättä määrää yksikäsitteisesti myöskään kahden irrotuksen symmetrisenä erotuksena saatavaa irrotusta. Olkoon $G = (V, E)$ kuvan 2.22 graafi, missä

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \text{ ja } E = \{e_1, e_2\} = \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\}.$$

Olkoon $V_1 = \{v_1\}$ ja $V_2 = \{v_2, v_3, v_4\}$ sekä $V_3 = \{v_3\}$ ja $V_4 = \{v_1, v_2, v_4\}$. Nyt

$$\langle V_1, V_2 \rangle \oplus \langle V_3, V_4 \rangle = \{e_1\} \oplus \{e_2\} = \{e_1, e_2\}$$

ja tämä irrotus voi olla joko $\langle \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\} \rangle$ tai $\langle \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\} \rangle$.



Kuva 2.22. Graafi, jossa särmäjoukko ei välttämättä määrää yksikäsitteisesti irrotusta.

Lause 2.26. Jos v on yhtenäisen vähintään kaksisolmuisen graafin $G = (V, E)$ solmu, niin $\langle \{v\}, V \setminus \{v\} \rangle$ on graafin G irrotus. Tämä irrotus on irrotusjoukko täsmälleen silloin, kun $G - v$ on yhtenäinen (eli jos v ei ole irrotussolmu).

Todistus. Koska $\{\{v\}, V \setminus \{v\}\}$ on joukon V luokkajako, niin $\langle \{v\}, V \setminus \{v\} \rangle$ on graafin G irrotus. Selvästi $\langle \{v\} \rangle$ on yhtenäinen, joten lauseen 2.21 mukaan $\langle \{v\}, V \setminus \{v\} \rangle$ on graafin G irrotusjoukko täsmälleen silloin, kun myös $G - v$ on yhtenäinen (eli v ei ole irrotussolmu).

□

Seuraus 2.27. Yhtenäisen yksinkertaisen vähintään kaksisolmuisen graafin G solmun v kautta kulkevien särmien joukko on graafin G irrotusjoukko täsmälleen silloin, kun v ei ole graafin G irrotussolmu.

Todistus. Koska G on yksinkertainen, solmun v kautta kulkevien särmien joukko on nimenomaan joukko $\langle \{v\}, V \setminus \{v\} \rangle$.

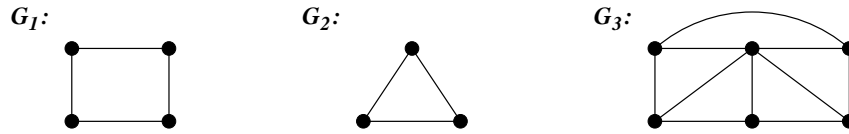
□

Lopuksi voidaan vielä todeta, että graafi $G = (V, E)$ on kaksijakoinen täsmälleen silloin, kun on olemassa sellainen graafin G irrotus $\langle V_1, V_2 \rangle$, että $\langle V_1, V_2 \rangle = E$.

2.8 Yhtenäisyysaste

Olemme edellä todenneet, että graafi voi olla yhtenäinen tai epäyhtenäinen. Yhtenäiset graafit voidaan lisäksi luokitella sen mukaan, kuinka paljon graafista voidaan poistaa solmuja tai särmiä niin, että graafi pysyy vielä yhtenäisenä. Tarkastelemme aluksi solmujen poistamista.

Määritelmä 2.19. Graafin G (solmu)yhtenäisyysaste ((vertex) connectivity) $\kappa(G)$ on pienin määrä solmuja, joiden poistaminen tekee graafista epäyhtenäisen tai yksisolmuisen.



Kuva 2.23. Yhtenäisyysasteet $\kappa(G_1) = 2$, $\kappa(G_2) = 2$ ja $\kappa(G_3) = 3$.

Jos graafi G on epäyhtenäinen tai yksisolmuinen, niin $\kappa(G) = 0$. Muussa tapauksessa (G yhtenäinen ja vähintään kaksisolmuinen) $\kappa(G) \geq 1$.

Lause 2.28. *Olkoon G yhtenäinen graafi. Jos G on kaksisolmuinen tai siinä on ainakin yksi irrotussolmu, niin $\kappa(G) = 1$. Muussa tapauksessa (G vähintään kolmisolmuinen ja siinä ei ole irrotussolmuja) $\kappa(G) \geq 2$.*

Todistus. Olkoon G yhtenäinen vähintään kaksisolmuinen graafi. Tällöin $\kappa(G) \geq 1$. Jos G on kaksisolmuinen, yhden solmun poistaminen tekee siitä yksisolmuisen ja siis $\kappa(G) = 1$. Jos graafissa G on irrotussolmu v , solmun v poistaminen tekee siitä epäyhtenäisen ja siis $\kappa(G) = 1$.

Oletetaan seuraavaksi, että graafissa G on vähintään kolme solmua, joista mikään ei ole irrotussolmu. Tehdään vastaoletus, että $\kappa(G) = 1$. Silloin on olemassa sellainen solmu v , että poistamalla se graafista tulee joko yksisolmuinen tai epäyhtenäinen. Koska graafissa on ainakin kolme solmua, siitä tulee epäyhtenäinen. Siis solmu v on irrotussolmu, mikä on mahdotonta. \square

Lause 2.29. *Jos n -solmuinen yksinkertainen graafi G on täydellinen, niin $\kappa(G) = n - 1$. Muussa tapauksessa $\kappa(G) \leq n - 2$.*

Todistus. Jos graafi G on täydellinen, se pysyy yhtenäisenä ja täydellisenä, kun siitä poistetaan solmuja. Kun solmuja on poistettu $n - 1$ kappaletta, niitä on enää yksi jäljellä. Siis $\kappa(G) = n - 1$.

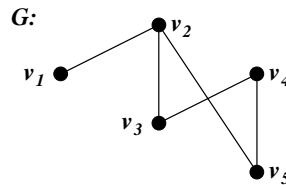
Jos graafi ei ole täydellinen on olemassa kaksi solmua, jotka eivät ole vierussolmuja. Muiden solmujen poistaminen tekee graafista epäyhtenäisen. Koska muita solmuja on $n - 2$ kappaletta, niin $\kappa(G) \leq n - 2$. \square



Kuva 2.24. Yhtenäisyysasteet $\kappa(G_1) = 3$ ja $\kappa(G_2) = 2$.

Määritelmä 2.20. Solmujoukko $W \subset V$ on graafin $G = (V, E)$ hajotusjoukko (*disconnecting set*), jos $G - W$ on epäyhtenäinen tai yksisolmuinen.

Esimerkki 2.11. Kuvan 2.25 graafin G hajotusjoukkoja ovat esimerkiksi joukot $W_1 = \{v_2\}$, $W_2 = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ja $W_3 = \{v_3, v_5\}$.



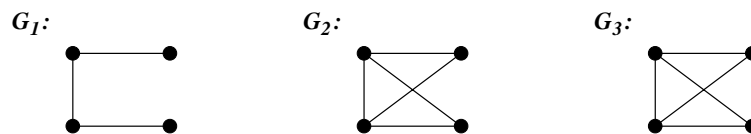
Kuva 2.25. Yksinkertainen graafi G .

Graafin hajotusjoukko voi olla tyhjä. Tällöin graafi on epäyhtenäinen tai yksisolmuinen. Jos $G = (V, E)$ on epäyhtenäinen, mikä tahansa joukko $W \subset V$ on graafin G hajotusjoukko.

Määritelmä 2.21. Graafi G on (vähintään) k -yhtenäinen (*k-connected*), jos $\kappa(G) \geq k$ ($k \in \mathbb{Z}_+$).

Siis k -yhtenäisessä graafissa jokaisessa hajotusjoukossa on vähintään k solmua. Edelleen, jos graafissa G on n solmua, niin G on korkeintaan $(n - 1)$ -yhtenäinen. Yhtenäiset vähintään kaksisolmuiset graafit ovat 1-yhtenäisiä.

Esimerkki 2.12. Kuvan 2.26 graafi G_1 on 1-yhtenäinen ja $\kappa(G_1) = 1$. Graafi G_2 on 1- ja 2-yhtenäinen ja $\kappa(G_2) = 2$. Graafi G_3 taas on 1-, 2- ja 3-yhtenäinen ja $\kappa(G_3) = 3$.



Kuva 2.26. Yksinkertaiset graafit G_1 , G_2 ja G_3 .

Seuraavat kaksi lausetta seuraavat suoraan lauseista 2.28 ja 2.29.

Lause 2.30. *Olkoon G yhtenäinen vähintään kolmisolmuinen graafi. Tällöin G on 2-yhtenäinen täsmälleen silloin, kun graafissa G ei ole irrotussolmuja.*

Lause 2.31. Jos n -solmuinen yksinkertainen graafi G on täydellinen, niin G on $(n - 1)$ -yhtenäinen. Muussa tapauksessa G on korkeintaan $(n - 2)$ -yhtenäinen.

Seuraava lause taas osoittaa, että graafin yhtenäisyysaste ei voi olla suurempi kuin minimiaste.

Lause 2.32. Graafin yhtenäisyysasteen ja minimiasteen välillä on voimassa arvio

$$\kappa(G) \leq \delta(G).$$

Todistus. Jos graafi $G = (V, E)$ on epäyhtenäinen, niin $\kappa(G) = 0$ ja väite on tosi. Voimme siis olettaa jatkossa, että G on yhtenäinen.

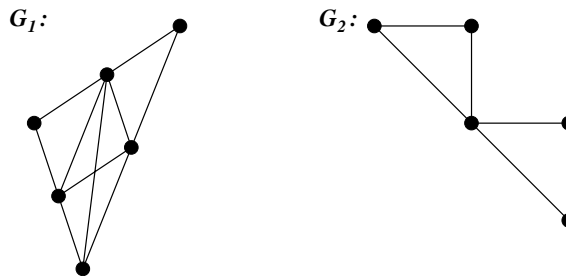
Olkoon v graafin G jokin solmu ja $\Gamma(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E, u \neq v\}$ solmun v vierussolmujen joukko. Koska graafissa $G - \Gamma(v)$ solmu v on eristetty, niin $\Gamma(v)$ on graafin G hajotusjoukko. Siis yhtenäisyysaste $\kappa(G) \leq |\Gamma(v)|$. Toisaalta solmun v asteelle pätee $|\Gamma(v)| \leq \deg(v)$, sillä solmulla on korkeintaan yhtä monta vierussolmua kuin siitä lähtee särmiä (yhtäsuuruus on voimassa yksinkertaisille graafeille). Erityisesti arvio

$$\kappa(G) \leq |\Gamma(v)| \leq \deg(v)$$

on voimassa sille solmulle, jonka aste on pienin. Siis

$$\kappa(G) \leq \delta(G).$$

□



Kuva 2.27. Graafien minimiasteet ovat $\delta(G_1) = 2$ ja $\delta(G_2) = 2$ ja yhtenäisyysasteet ovat $\kappa(G_1) = 2$ ja $\kappa(G_2) = 1$.

Lause 2.33. Jos n -solmuisessa graafissa G on m särmiä, niin

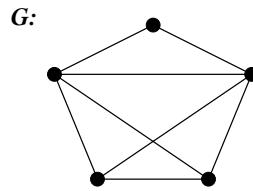
$$\kappa(G) \leq \lfloor 2m/n \rfloor.$$

Todistus. Olkoon $G = (V, E)$, missä $|V| = n$ ja $|E| = m$. Silloin lauseiden 2.32 ja 1.1 nojalla

$$\kappa(G) \leq \delta(G) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} \delta(v) \leq \left\lfloor \frac{1}{n} \sum_{v \in V} \deg(v) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{n} 2|E| \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor.$$

□

Esimerkki 2.13. Kuvan 2.28 graafissa G on 5 solmua ja 8 särmää, joten lauseen 2.33 perusteella $\kappa(G) \leq \left\lfloor \frac{16}{5} \right\rfloor = 3$. (Itse asiassa $\kappa(G) = 2$.)



Kuva 2.28. Yksinkertainen graafi G .

Lause 2.34. *Särmiä n -solmuisessa k -yhtenäisessä graafissa on vähintään $\lceil kn/2 \rceil$.*

Todistus. Olkoon $G = (V, E)$, missä $|V| = n$ ja $|E| = m$. Koska lauseen 2.33 nojalla

$$k \leq \kappa(G) \leq \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor \leq \frac{2m}{n},$$

niin

$$m \geq \frac{kn}{2}.$$

Koska särmien lukumäärä on kokonaisluku, niin

$$m \geq \left\lceil \frac{kn}{2} \right\rceil.$$

□

Määritelmä 2.22. Hararyn graafi $H_{k,n}$ ($k < n$) on graafi, joka muodostetaan seuraavasti. Jos k on parillinen ($= 2r$), niin $H_{k,n} = H_{2r,n} = (V, E)$, missä

$$V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$$

ja

$$E = \{\{v_i, v_j\} \mid i \neq j \text{ ja joko } |i - j| \leq r \text{ tai } |n - (i - j)| \leq r\}.$$

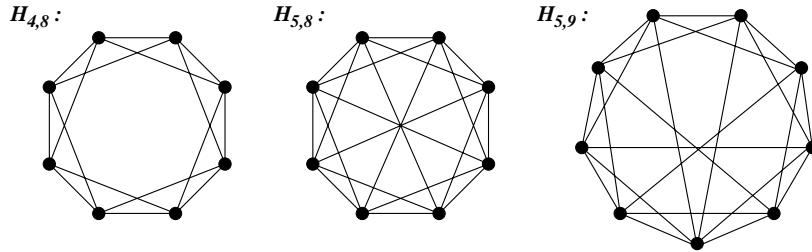
Jos k on pariton ($= 2r + 1$), mutta n on parillinen saadaan Hararyn graafi $H_{2r+1,n}$ lisäämällä Hararyn graafiin $H_{2r,n}$ särmät

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \{v_i, v_j\} \mid i \neq j \text{ ja } |i - j| = \frac{n}{2} \right\} \\ &= \left\{ \{v_0, v_{n/2}\}, \{v_1, v_{n/2+1}\}, \dots, \{v_{n/2-1}, v_{n-1}\} \right\}. \end{aligned}$$

Jos sekä k ($= 2r + 1$) että n ovat parittomia saadaan Hararyn graafi $H_{2r+1,n}$ lisäämällä Hararyn graafiin $H_{2r,n}$ särmät

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \{v_i, v_j\} \mid i = 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2} \text{ ja } j = i + \frac{n+1}{2} \right\} \\ &= \left\{ \{v_0, v_{(n+1)/2}\}, \{v_1, v_{(n+1)/2+1}\}, \dots, \{v_{(n-1)/2}, v_n\} \right\}, \end{aligned}$$

missä $v_n = v_0$.



Kuva 2.29. Hararyn graafit $H_{4,8}$, $H_{5,8}$ ja $H_{5,9}$.

Lause 2.35. Hararyn graafissa $H_{k,n}$ on $\lceil kn/2 \rceil$ särmää.

Todistus. Muodostetaan Hararyn graafi $H_{k,n}$. Jos k on parillinen ($k = 2r$), solmun v_i vierussolmuja ovat solmut $v_{i\pm 1}, v_{i\pm 2}, \dots, v_{i\pm r}$. (Jos $i \pm l \notin \{0, 1, \dots, n-1\}$ ($1 \leq l \leq r$), solmulla $v_{i\pm l}$ tarkoitetaan tässä solmua $v_{i\pm(l-n)}$.) Särmiä on siis yhteensä

$$n2r/2 = nk/2$$

kappaletta.

Jos k on pariton ($k = 2r + 1$) ja n parillinen, Hararyn graafissa $H_{2r,n}$ on $n2r/2$ särmää ja siihen lisätään $n/2$ särmää. Tällöin särmiä on yhteensä

$$n2r/2 + n/2 = nk/2$$

kappaletta.

Jos sekä $k (= 2r + 1)$ että n ovat parittomia, Hararyn graafissa $H_{2r,n}$ on $n2r/2$ särmää ja siihen lisätään $(n + 1)/2$ särmää. Tällöin särmiä on yhteensä

$$n2r/2 + (n + 1)/2 = nk/2 + 1/2 = \lceil nk/2 \rceil$$

kappaletta.

□

Lause 2.36. *Oletetaan $k, n \in \mathbb{Z}_+$, ($2 \leq k < n$). Tällöin on olemassa yksinkertainen n -solmuinen k -yhtenäinen graafi, jossa on täsmälleen $\lceil kn/2 \rceil$ särmää.*

Todistus. Lauseen 2.35 mukaan Hararyn graafissa $H_{k,n}$ on $\lceil kn/2 \rceil$ särmää. Osoitamme, että Hararyn graafi $H_{k,n} = (V, E)$ on k -yhtenäinen. Todistamme tässä tapauksen, jossa k on parillinen ($k = 2r$). Muiden tapausten todistus sivuutetaan (ks. Thulasiraman & Swamy [17], sivut 204–205).

Olkoon $S \subset V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$, missä $|S| < 2r$. Koska $k < n$, joukossa $V \setminus S$ on vähintään kaksi alkioita. Olkoot $v_\alpha, v_\beta \in V \setminus S$ mielivaltaisesti valitut. Todistuksen yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa, että $\alpha < \beta$. Olkoon edelleen $A = \{v_\alpha, v_{\alpha+1}, \dots, v_\beta\}$ ja $B = \{v_\beta, v_{\beta+1}, \dots, v_{n-1}, v_0, \dots, v_{\alpha-1}, v_\alpha\}$. Tällöin jomankumman joukon alkioista korkeintaan $r - 1$ on joukon S alkioita. Toisaalta graafissa $H_{k,n}$ solmut v_i ja v_j ovat yhdistetyt, jos $|i - j| \leq r$ tai $|n - (i - j)| \leq r$. Siis joukon S alkioiden poistamisen jälkeenkin joko joukon $A \setminus S$ tai joukon $B \setminus S$ peräkkäiset solmut ovat aina yhdistetyt. Näin ollen jommassakummassa joukossa on polku solmujen v_α ja v_β välillä. Siis $H_{k,n} - S$ on yhtenäinen eli $\kappa(H_{k,n}) > k - 1$. Siis $H_{k,n}$ on k -yhtenäinen.

□

Lause 2.37. *Olkoon G yksinkertainen n -solmuinen graafi, jonka solmut on järjestetty niin, että*

$$\deg(v_1) \leq \deg(v_2) \leq \dots \leq \deg(v_n).$$

Jos tällöin $k < n$ ja

$$\deg(v_i) \geq i + k - 1$$

aina, kun $1 \leq i \leq n - 1 - \deg(v_{n-k+1})$, niin G on k -yhtenäinen.

Todistus. Olkoon $G = (V, E)$ yksinkertainen graafi, joka toteuttaa annetut ehdot. Tehdään vasta oletus, että G ei ole k -yhtenäinen. Silloin on olemassa graafin G hajotusjoukko W , jossa on $m < k$ solmua. Koska $n > k > m$, niin $G - W$ on vähintään kaksisolmuinen. Siis $G - W$ ei ole yhtenäinen. Olkoon $H = (U, F)$ se graafin $G - W$ komponentti, jossa on vähiten solmuja. Olkoon $h = |U|$. Tällöin graafissa H jokaisen solmun aste on pienempi tai yhtäsuuri kuin $h - 1$, joten graafissa G

$$\deg(u) \leq (h - 1) + m < (h - 1) + k$$

aina, kun $u \in U$.

Nyt siis graafissa G on ainakin h solmua, joiden asteluku on pienempi kuin $(h - 1) + k$. Erityisesti siis $\deg(v_h) < (h - 1) + k = h + k - 1$. Siis lauseen oletusten mukaan ainoa mahdollisuus on, että $h > n - 1 - \deg(v_{n-k+1})$ eli

$$n - h - 1 < \deg(v_{n-k+1}). \quad (2.1)$$

Toisaalta, koska graafissa $G - W$ on $n - m$ solmua ja sen pienimmässä komponentissa H on h solmua, niin $h \leq n - m - h$ eli $h + m \leq n - h$. Siis komponentin H jokaisen solmun u asteelle pätee

$$\deg(u) \leq (h - 1) + m \leq n - h - 1.$$

Koska W on hajotusjoukko, joukon $(V \setminus U) \setminus W$ solmut eivät ole joukon U solmujen vierussolmuja, joten myös joukon $(V \setminus U) \setminus W$ solmujen aste on korkeintaan $n - h - 1$. Siis ainoastaan joukon W solmujen aste voi olla suurempi tai yhtäsuuri kuin $n - h - 1$.

Täten on olemassa korkeintaan m sellaista solmua v , että $\deg(v) > n - h - 1$. Siis ehdon (2.1) nojalla

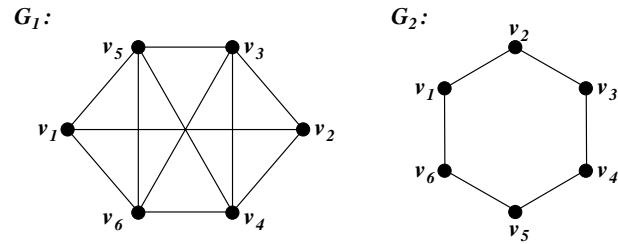
$$\deg(v_{n-m}) \leq n - h - 1 < \deg(v_{n-k+1}).$$

Koska solmut on numeroitu niiden asteiden mukaisessa suuruusjärjestyksessä, on voimassa $n - m < n - k + 1$ eli $m \geq k$. Tämä taas on mahdotonta, koska vasta oletuksesta seuraa, että $m < k$.

□

Esimerkki 2.14. Kuvan 2.30 graafissa G_1 solmujen lukumäärä n on 6. Jos $k = 3$, niin $k < n$. Edelleen $n - 1 - \deg(v_{n-k+1}) = 6 - 1 - \deg(v_4) = 6 - 1 - 4 = 1$. Kun $i = 1$, niin $i + k - 1 = 1 + 3 - 1 = 3 \leq \deg(v_1) = \deg(v_i)$. Siis graafi G_1 on lauseen 2.37 perusteella 3-yhtenäinen.

Lauseen 2.37 ehtojen toteutuminen ei ole kuitenkaan välttämätön ehto k -yhtenäisyydelle. Esimerkiksi kuvan 2.30 graafi G_2 on 2-yhtenäinen, vaikka lauseen 2.37 oletukset eivät tässä tapauksessa ole voimassa.

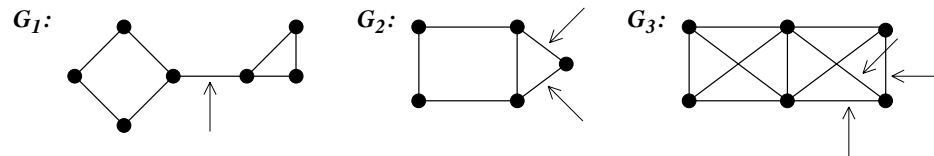


Kuva 2.30. Kolmiyhtenäinen graafi G_1 ja kaksiyhtenäinen graafi G_2 .

2.9 Särmäyhtenäisyys

Luvussa 2.8 graafeja luokiteltiin tarkastelemalla, miten monta solmua graafista voidaan poistaa ilman, että graafista tulee epäyhtenäinen. Seuraavaksi asiaa tarkastellaan tutkimalla särmien poistamista.

Määritelmä 2.23. Graafin G särmäyhtenäisyysaste (*edge connectivity*) $\kappa'(G)$ on pienin määrä särmää, joiden poistaminen tekee graafista epäyhtenäisen tai yksisolmuisen.



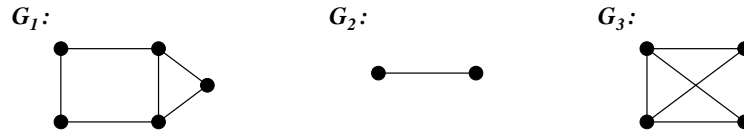
Kuva 2.31. Särmäyhtenäisyysasteet $\kappa'(G_1) = 1$, $\kappa'(G_2) = 2$ ja $\kappa'(G_3) = 3$.

Yksisolmuisen tai epäyhtenäisen graafin särmäyhtenäisyysaste on nolla. Muulloin graafin särmäyhtenäisyysaste on graafin vähäsärmäisimmän irrotuksen särmien lukumäärä ja särmäyhtenäisyysaste on vähintään yksi.

Määritelmä 2.24. Graafi G on k -särmäyhtenäinen (*k-edge connected*), jos $\kappa'(G) \geq k$ ($k \in \mathbb{Z}_+$).

Siis ainakin k särmää täytyy poistaa, jotta k -särmäyhtenäinen graafi muuttuisi epäyhtenäiseksi.

Esimerkki 2.15. Kuvan 2.32 graafin G_1 särmäyhtenäisyysaste on kaksi ja graafi on 1- ja 2-särmäyhtenäinen. Graafin G_2 särmäyhtenäisyysaste on yksi ja graafi on 1-särmäyhtenäinen. Graafin G_3 särmäyhtenäisyysaste on kolme ja graafi on 1-, 2- ja 3-särmäyhtenäinen.



Kuva 2.32. Yksinkertaiset graafit G_1 , G_2 ja G_3 .

Lause 2.38. *Olkoon G graafi. Tällöin yhtenäisyysasteelle, särmäyhtenäisyysasteelle ja minimiasteelle pätee*

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G).$$

Todistus. Jos graafi $G = (V, E)$ on epäyhtenäinen tai yksisolmuinen, väite on tosi. Voimme siis olettaa jatkossa, että graafi on yhtenäinen ja vähintään kaksisolmuinen.

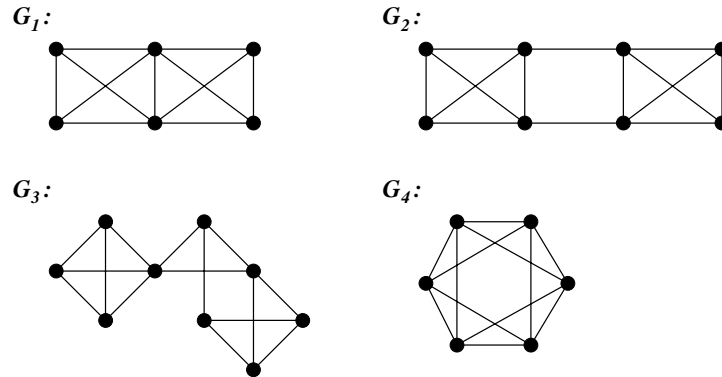
Ensimmäisen epäyhtälön todistamiseksi riittää osoittaa, että jos $\kappa(G)$ on pienin määrä solmuja, jotka poistamalla graafin saa epäyhtenäiseksi, niin solmujen kanssa tulee samalla poistetuksi vähintään $\kappa(G)$ särmää. Tämä taas pitää paikkansa, sillä jos särmää tulisi poistetuksi vain $\kappa(G) - 1$, yhdestä särmästä tulisi poistetuksi molemmat päätesolmut ilman, että molemmat solmuista olisivat myös jonkin muun särmän päätesolmuja. Silloin jo vain toisen poistaminen riittäisi tekemään graafin epäyhtenäiseksi.

Jälkimmäisen epäyhtälön todistamiseksi oletamme, että v on sellainen graafin G solmu, jonka aste on mahdollisimman pieni. Siis $\deg(v) = \delta(G)$. Nyt $F = \langle V \setminus \{v\}, \{v\} \rangle$ on lauseen 2.26 nojalla graafin G irrotus. Koska $\kappa'(G)$ on vähäisimmän irrotuksen särmien lukumäärä ja irrotuksessa F on korkeintaan yhtä monta särmää kuin solmulla v on vierussolmuja, on $\kappa'(G) \leq |F| \leq \delta(G)$. \square

Esimerkki 2.16. Kuvan 2.33 yksinkertaisille graafeille $\kappa(G_1) = 2$, $\kappa'(G_1) = 3$, $\delta(G_1) = 3$, $\kappa(G_2) = 2$, $\kappa'(G_2) = 2$, $\delta(G_2) = 3$, $\kappa(G_3) = 1$, $\kappa'(G_3) = 2$, $\delta(G_3) = 3$, $\kappa(G_4) = 4$, $\kappa'(G_4) = 4$ ja $\delta(G_4) = 4$.

Lause 2.39. *Olkoon G sellainen yhtenäinen yksinkertainen graafi, että $\kappa'(G) < \delta(G)$. Tällöin graafissa G on sellainen irrotus $\langle V_1, V_2 \rangle$, että joukossa V_1 on solmu, jolla ei ole vierussolmuja joukossa V_2 , ja joukossa V_2 on solmu, jolla ei ole vierussolmuja joukossa V_1 .*

Todistus. Olkoon G sellainen yhtenäinen yksinkertainen graafi, että $\kappa'(G) < \delta(G)$, ja olkoon $\langle V_1, V_2 \rangle$ sellainen graafin G irrotus, että $|\langle V_1, V_2 \rangle| = \kappa'(G)$.



Kuva 2.33. Yksinkertaiset graafit G_1 , G_2 , G_3 ja G_4 .

Tehdään nyt vasta oletus, että jokainen joukon V_1 solmu on yhdistetty ainakin yhdellä särmällä johonkin joukon V_2 solmuun ja jokainen joukon V_2 solmu on yhdistetty ainakin yhdellä särmällä johonkin joukon V_1 solmuun. Siis $\kappa'(G) \geq |V_1|$ ja edelleen oletuksen mukaan $\delta(G) > |V_1|$. Olkoon m aligraafin $\langle V_1 \rangle$ särmien lukumäärä. Koska joukon V_1 solmuista lähtee yhteensä vähintään $|V_1|\delta(G)$ särmää, niin

$$\begin{aligned} m &\geq \frac{1}{2}(|V_1|\delta(G) - \kappa'(G)) \\ &> \frac{1}{2}(|V_1|\delta(G) - \delta(G)) \\ &= \frac{1}{2}\delta(G)(|V_1| - 1) \\ &> \frac{1}{2}|V_1|(|V_1| - 1), \end{aligned}$$

eli yksinkertaisessa aligraafissa $\langle V_1 \rangle$ on enemmän särmiä kuin $|V_1|$ -solmuisessa täydellisessä graafissa, mikä on mahdotonta. Vastaava päättely voidaan suorittaa aligraafille $\langle V_2 \rangle$, joten sekä joukossa V_1 että joukossa V_2 on ainakin yksi solmu, josta ei ole särmää toiseen joukkoon.

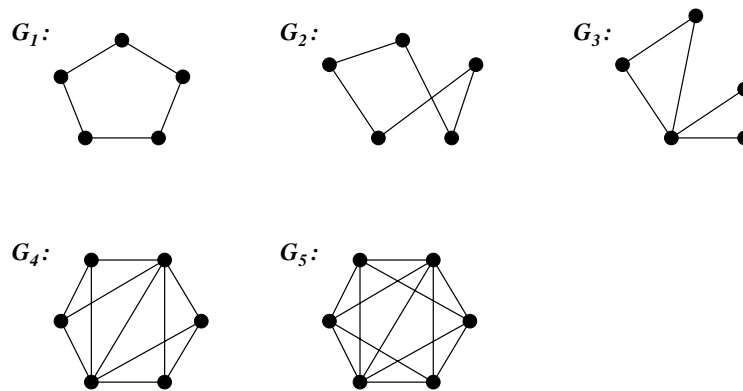
□

Lause 2.40. *Olkkoon G sellainen n -solmuinen yksinkertainen graafi, että $\delta(G) \geq \lfloor n/2 \rfloor$. Tällöin*

$$\kappa'(G) = \delta(G).$$

Todistus. Olkkoon $G = (V, E)$ sellainen yksinkertainen n -solmuinen graafi, että $\delta(G) \geq \lfloor n/2 \rfloor$. Tehdään vasta oletus, että $\kappa'(G) \neq \delta(G)$. Tällöin lauseen 2.38 mu-

kaan $\kappa'(G) < \delta(G)$. Siis graafissa G on sellainen irrotus $\langle V_1, V_2 \rangle$, jossa on vähemmän särkeä kuin on graafin minimiaste. Lauseen 2.39 perusteella kummassakin joukossa V_1 ja V_2 on siis yksi solmu, jonka kaikki vierussolmut ovat tässä samassa joukossa. Tällöin kummassakin joukossa on ainakin $\delta(G) + 1$ solmua. Solmuja on yhteensä $|V| = |V_1| + |V_2| \geq 2\delta(G) + 2 \geq 2\lfloor n/2 \rfloor + 2 > n$, mikä on mahdotonta. \square



Kuva 2.34. Graafeja, joiden särmäyhtenäisyysasteet ja minimiasteet ovat yhtäsuuret.

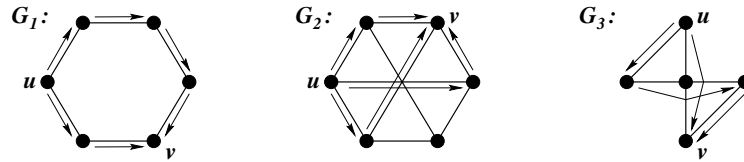
2.10 Mengerin lause

Seuraavat kaksi versiota Mengerin lauseesta antavat yhteyden graafin yhtenäisyysasteiden ja solmuiltaan tai särmiltään erillisten polkujen lukumäärän välillä. Lauseiden todistukset löytyvät useista graafiteorian oppikirjoista, ks. esimerkiksi Thulasiraman & Swamy [17], luku 12.10.

Lause 2.41 . *Yksinkertainen n -solmuinen graafi G on k -solmuyhtenäinen ($k < n$) täsmälleen silloin, kun graafin G minkä tahansa kahden eri solmun välillä on ainakin k solmuiltaan erillistä polkua (ts. kaikki välisolmut eri solmuja).*

Lause 2.42. *Yksinkertainen n -solmuinen graafi G on k -särmäyhtenäinen ($k < n$) täsmälleen silloin, kun graafin G minkä tahansa kahden eri solmun välillä on ainakin k särmiltään erillistä polkua.*

Esimerkki 2.17. Kuvan 2.35 graafeilla $\kappa(G_1) = 2$, $\kappa(G_2) = 3$, $\kappa(G_3) = 1$, $\kappa'(G_1) = 2$, $\kappa'(G_2) = 3$ ja $\kappa'(G_3) = 2$. Esimerkiksi solmujen u ja v välillä on graafeissa G_1 ja G_3 kaksi särmiltään erillistä polkua ja graafissa G_2 kolme särmiltään erillistä polkua.



Kuva 2.35. Graafeilla G_1 , G_2 ja G_3 on eri yhtenäisyysasteet.

Luku 3

Puut

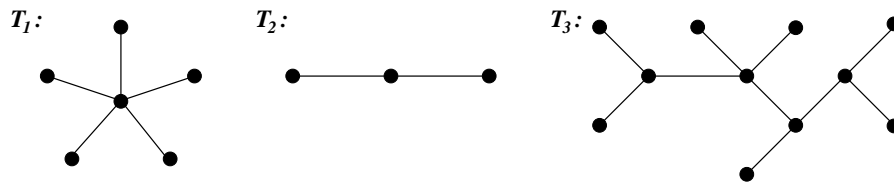
Tässä luvussa tarkastellaan yhtenäisiä silmukattomia graafeja eli puita. Pääpaino on graafien virittävillä puilla sekä näiden yhteydellä silmukoihin ja irrotusjoukkoihin. Lopuksi käydään läpi graafien vektoriavaruuksiin liittyviä tuloksia.

3.1 Puu

Aloitamme luonnollisesti peruskäsitteistä ja -tuloksista.

Määritelmä 3.1. *Puu (tree)* on suuntaamaton yhtenäinen silmukaton graafi. Jos puu on graafin G aligraafi, kyseessä on graafin G *alipuu (subtree)*.

Esimerkki 3.1. Kuvassa 3.1 on muutamia puita. Kuvassa 3.2 taas on pari esimerkkiä orgaanisesta kemiasta, jossa avoketjuisia hiilivetyjä mallinnetaan puiden avulla.



Kuva 3.1. Esimerkkejä puista.

Todistamme ensiksi, että n -solmuisessa puussa on $n - 1$ särmää ja m -särmäisessä puussa vastaavasti $m + 1$ solmua. Näiden tulosten avulla osoitamme, että jos silmukattomassa $(n - 1)$ -särmäisessä graafissa on korkeintaan n solmua, niin tämä graafi on puu. Jätämme harjoitustehtäväksi todistaa, että n -solmuinen $(n - 1)$ -särmäinen yhtenäinen graafi on puu.

Lause 3.4. *Olkoon G jokin n -solmuinen m -särmäinen graafi. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.*

1. Graafi G on puu.
2. Graafin G jokaisen kahden solmun välillä on täsmälleen yksi suora polku eikä graafissa G ole luppeja.
3. Graafi G on yhtenäinen ja $m = n - 1$.
4. Graafi G on silmukaton ja $m = n - 1$.
5. Graafi G on silmukaton ja lisäämällä graafin G mikä tahansa uusi särmä saadaan graafi, jossa on täsmälleen yksi silmukka.

Todistus. Osoitamme, että ensimmäisestä väitteestä seuraa toinen, toisesta kolmas, kolmannelle neljäs, neljännestä viides ja viidennestä ensimmäinen.

(i) Jos G on puu, sen kahden solmun välillä on lauseen 3.1 mukaan täsmälleen yksi suora polku. Koska G on puuna silmukaton, siinä ei ole myöskään luppeja.

(ii) Oletetaan seuraavaksi, että graafin G jokaisen kahden solmun välillä on täsmälleen yksi suora polku eikä graafissa ole luppeja. Siis graafi G on yhtenäinen ja lauseen 2.4 perusteella myös silmukaton. Siis G on puu, joten lauseen 3.2 mukaan $m = n - 1$.

(iii) Oletetaan, että G on yhtenäinen ja $m = n - 1$. Jos graafissa G on silmukka ja e on jokin tämän silmukan särmä, myös $G - e$ on lauseen 2.8 mukaan yhtenäinen. Toisaalta n -solmuisessa yhtenäisessä graafissa on vähintään $n - 1$ särmää. (Totea.) Siis $(n - 2)$ -särmäinen graafi $G - e$ ei voi olla yhtenäinen. Siis G on silmukaton.

(iv) Oletetaan seuraavaksi, että G on silmukaton ja $m = n - 1$. Lauseen 3.3 mukaan G on puuna yhtenäinen. Lisätään nyt graafiin G särmä $e = \{u, v\}$. Koska särmien u ja v välillä on jo täsmälleen yksi polku, muodostuu täsmälleen yksi silmukka.

(v) Oletetaan lopuksi, että G on silmukaton ja että lisäämällä graafiin G mikä tahansa uusi särmä saadaan graafi, jossa on täsmälleen yksi silmukka. Osoitetaan, että tällöin graafi G on puu. Jos G ei ole puu, se on epäyhtenäinen. Olkoot u ja v sellaiset graafin G solmut, jotka eivät ole yhdistetyt. Lisäämällä solmujen u ja v välille särmä, saadaan niiden välille vain yksi suora polku. Lauseen 2.4 mukaan graafi on edelleen silmukaton, mikä on ristiriidassa jälkimmäisen oletuksen kanssa. \square

Lause 3.5. *Vähintään kaksisolmuisessa puussa on ainakin kaksi loppusolmua.*

Todistus. Olkoon $T = (V, E)$ vähintään kaksisolmuinen puu ja olkoon $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Tällöin lauseen 3.2 nojalla $|E| = n - 1$, joten

$$\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 2|E| = 2n - 2.$$

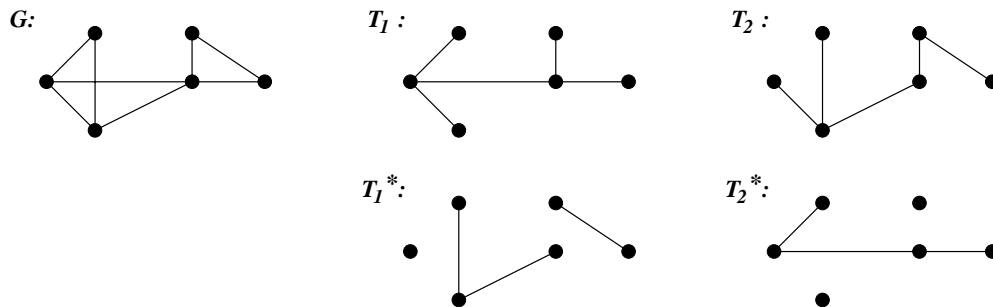
Toisaalta T on vähintään kaksisolmuinen ja puuna yhtenäinen, joten puun T jokaisen solmun asteluku on vähintään yksi. Siis puussa T on korkeintaan $n - 2$ solmua, joiden asteluku on suurempi tai yhtäsuuri kuin kaksi. Siis ainakin kahden solmun aste on yksi ja nämä solmut ovat loppusolmuja. □

Lause 3.5 voidaan todistaa myös osoittamalla, että puussa ei-irrotussolmut ovat loppusolmuja. (Totea.) Lauseen 2.20 mukaan ei-irrotussolmuja on ainakin kaksi.

3.2 Virittävä puu

Seuraavaksi tarkastelemme graafien virittäviä puita. Määritelmän 1.25 mukaan aligraafi, jossa on kaikki graafin solmut, on virittävä aligraafi. Virittävä puu on tämän erikoistapaus. Virittävät puut ovat käyttökelpoisia esimerkiksi tarkasteltaessa graafien yhtenäisyyttä.

Määritelmä 3.2. Graafin G *virittävä puu* (*spanning tree*) on graafin G alipuu, joka sisältää kaikki graafin G solmut. Jos T on graafin G virittävä puu, niin $T^* = G - T$ on graafin G *virittävä vastapuu* (*cospanning tree*). Virittävän puun särkeä sanotaan myös *oksiksi* (*branches*) ja virittävän vastapuun särkeä *siteiksi* (*links*) tai *kaariksi* (*chords*).



Kuva 3.3. Graafin G virittävät puut T_1 ja T_2 sekä virittävät vastapuu T_1^* ja T_2^* .

Kaikilla graafeilla ei ole virittävää puuta (ks. lause 3.9). Toisaalta graafilla voi olla useita virittäviä puita (ks. kuva 3.3). Virittävä vastapuu ei yleensä ole puu.

Seuraavaksi tarkastelemme, mitkä ominaisuudet riittävät takaamaan, että graafin aligraafi on graafin virittävä puu. Seuraava lause seuraa suoraan lauseesta 3.4.

Lause 3.6. *Olkoon H jonkin n -solmuisen graafin G jokin n -solmuinen ja m -särmäinen aligraafi. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.*

1. Graafi H on graafin G virittävä puu.
2. Graafin H jokaisen kahden solmun välillä on täsmälleen yksi suora polku eikä graafissa H ole luoppeja.
3. Graafi H on yhtenäinen ja $m = n - 1$.
4. Graafi H on silmukaton ja $m = n - 1$.
5. Graafi H on silmukaton ja lisäämällä graafin H mikä tahansa uusi särmä saadaan graafi, jossa on täsmälleen yksi silmukka.

Koska $(n - 1)$ -särmäisessä, silmukattomassa ja yhtenäisessä graafissa on n solmua, lauseen 3.6 kohdista 3 ja 4 seuraa edelleen seuraava lause.

Lause 3.7. *Olkoon G jokin n -solmuinen graafi. Tällöin graafin G aligraafi H on graafin G virittävä puu täsmälleen silloin, kun graafissa H on $n - 1$ särmää ja H on yhtenäinen sekä silmukaton.*

Siis virittävän puun määritelmän ja edellä olevien lauseiden perusteella n -solmuisen graafin G aligraafi H on graafin G virittävä puu, jos graafilla H on jotkin kolme seuraavasta neljästä ominaisuudesta.

1. Graafissa H on n solmua.
2. Graafi H on yhtenäinen.
3. Graafissa H on $n - 1$ särmää.
4. Graafi H on silmukaton.

Itse asiassa pelkästään ominaisuudet 3 ja 4 yhdessä riittävät takaamaan, että aligraafi H on virittävä puu. Tämä nähdään seuraavasta lauseesta.

Lause 3.8. *Olkoon G jokin n -solmuinen graafi. Tällöin graafin G aligraafi H on graafin G virittävä puu täsmälleen silloin, kun graafissa H on $n - 1$ särmää ja H on silmukaton.*

Todistus. (i) Lauseen 3.7 perusteella n -solmuisen graafin virittävä puu on silmukaton ja siinä on $n - 1$ särmää.

(ii) Olkoon H jonkin n -solmuisen graafin G silmukaton aligraafi, jossa on $n - 1$ särmää. Siis aligraafissa H on korkeintaan n solmua. Näin ollen lauseen 3.3 mukaan H on n -solmuinen puu. Siis H on graafin G virittävä puu. □

Lause 3.9. *Graafi on yhtenäinen täsmälleen silloin, kun sillä on virittävä puu.*

Todistus. (i) Oletetaan ensiksi että graafilla on virittävä puu. Silloin kaikki virittävän puun ja siis myös itse graafin solmut ovat yhdistetyt eli graafi on yhtenäinen.

(ii) Yhtenäisen graafin G virittävä puu T taas voidaan muodostaa käyttäen seuraavaa algoritmia.

1. Asetetaan $T := G$. Jos T on puu, lopetetaan.
2. Koska T on yhtenäinen ja T ei ole puu, graafissa T on ainakin yksi silmukka. Olkoon nyt e graafin T jonkin silmukan jokin särmä. Asetetaan $T := T - e$. Tällöin lauseen 2.8 mukaan T pysyy yhtenäisenä.
3. Jos T on puu, lopetetaan. Muuten jatketaan kohdasta 2.

Koska G on äärellinen ja siitä poistetaan jokaisella kierroksella särmä, algoritmi pysähtyy ja sen tuloksena on puu, jossa on samat solmut kuin graafissa G . Tuloksena on siis graafin G virittävä puu. □

Lause 3.10. *Olkoon $G = (V, E)$ yhtenäinen graafi ja $F \subseteq E$. Tällöin $G - F$ on epäyhtenäinen täsmälleen silloin, kun F sisältää ainakin yhden särmän jokaisesta graafin G virittävästä puusta.*

Todistus. Oletetaan ensiksi, että F sisältää ainakin yhden särmän jokaisesta graafin G virittävästä puusta. Tehdään vastaoletus, että $G - F$ on yhtenäinen. Tällöin lauseen 3.9 nojalla graafilla $G - F$ on virittävä puu T . Koska graafeilla G ja $G - F$ on sama solmujoukko, puu T on myös graafin G virittävä puu. Siis puun T jokin särmä kuuluu joukkoon F , mikä on mahdotonta.

Oletetaan toiseksi, että $G - F$ on epäyhtenäinen. Tehdään vastaoletus, että on olemassa sellainen graafin G virittävä puu T , että mikään puun T särmä ei kuulu joukkoon F . Tällöin T on myös graafin $G - F$ virittävä puu. Siis $G - F$ on lauseen 3.9 nojalla yhtenäinen, mikä on mahdotonta. □

Lause 3.11. *Yhtenäisen graafin G aligraafi H on jonkin graafin G virittävän puun aligraafi täsmälleen silloin, kun H on silmukaton.*

Todistus. (i) Jos H on jonkin virittävän puun aligraafi, niin H on silmukaton.

(ii) Olkoon H silmukaton ja olkoon T' jokin graafin G virittävä puu. Näistä muodostetaan seuraavalla tavalla graafin G virittävä puu, jonka alipuu H on.

1. Asetetaan $T := T' \cup H$. Jos T on silmukaton, lopetetaan.
2. Nyt graafissa T on silmukka, mutta aligraafi H on silmukaton. Siis on olemassa sellainen graafin T silmukka, jonka jokin särmä e ei ole aligraafin H särmä. Asetetaan $T := T - e$. Lauseen 2.8 mukaan T pysyy yhtenäisenä.
3. Jos T on silmukaton, lopetetaan. Muussa tapauksessa jatketaan kohdasta 2.

Koska T on äärellinen ja siitä poistetaan jokaisella kierroksella särmä, algoritmi pysähtyy ja sen tuloksena on silmukaton yhtenäinen graafi. Koska graafista T ei missään vaiheessa poistettu solmuja, tuloksena saatu puu on graafin G virittävä puu. Lisäksi H on kyseisen graafin aligraafi, joten tuloksena on vaadittu puu. \square

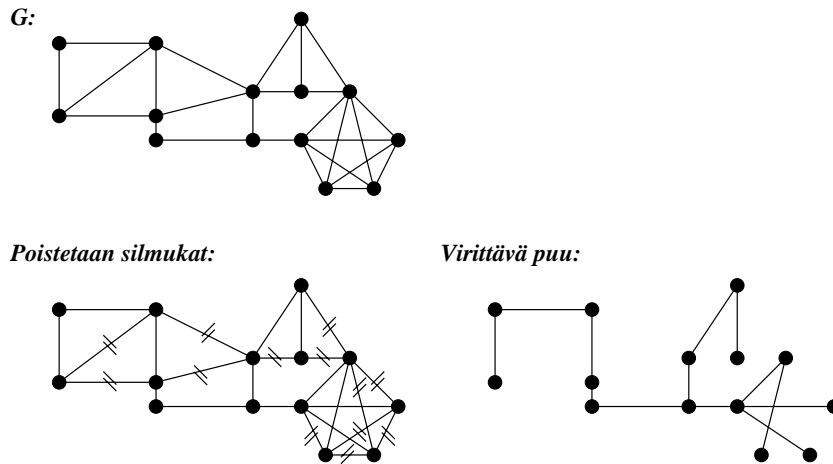
3.3 Virittävän puun konstruointi

Seuraavaksi esitetään kolme eri menetelmää annetun yhtenäisen graafin virittävän puun konstruointiin: *silmukoiden poistaminen*, *syvyysuuntainen etsintä* (*depth-first search*) ja *leveysuuntainen etsintä* (*breadth-first search*). Kustakin menetelmästä esitetään tässä vain yleiset pääpiirteet. Menetelmien yksityiskohdainen toteutus sivuutetaan (toteutukset löytyvät useimmista graafiteoriaa algoritmisesti käsittelevistä oppikirjoista). Erikseen on syytä todeta, että eri menetelmillä saadaan siis mahdollisesti eri virittävä puu ja kussakin menetelmässäkin tulos riippuu tietysti vielä menetelmän toteutustavasta.

Algoritmi 3.1 (Silmukoiden poistaminen). Virittävän puun muodostaminen silmukoita poistamalla perustuu lauseen 3.9 todistukseen. Tällöin siis virittävä puu muodostetaan seuraavasti.

1. Jos (jäljellä olevassa) graafissa ei ole silmukoita, lopetetaan.
2. Muussa tapauksessa valitaan jokin (jäljellä olevan) graafin silmukka ja poistetaan siitä yksi särmä.
3. Jatketaan kohdasta 1.

Tämä algoritmi vaatii alirutiinin, jonka avulla etsitään silmukoita. Se on siksi raskas toteuttaa ja sillä on lähinnä teoreettista mielenkiintoa. Esimerkki silmukoiden poistamisesta on kuvassa 3.4.



Kuva 3.4. Graafin G virittävän puun muodostaminen poistamalla silmukat.

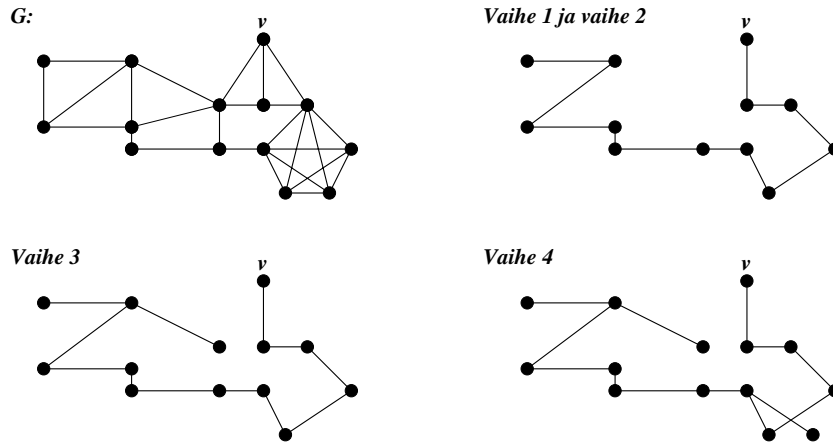
Algoritmi 3.2 (Syvyysuuntainen etsintä). Syvyysuuntaisessa etsinnässä virittävä puu muodostetaan seuraavasti.

1. Valitaan aloitussolmu mielivaltaisesti.
2. Edetään aloitussolmusta lähtien särmiä ja solmuja peräkkäin lisäämällä niin pitkälle kuin mahdollista ilman, että syntyy silmukoita.
3. Jos tarpeen, palataan polulla niin monta solmua taaksepäin, että voidaan jatkaa uuteen suuntaan lisäämällä särmiä ja solmuja peräkkäin.
4. Jatketaan menettelyä (kohta 3) kunnes kaikki solmut on saavutettu.

Kuvassa 3.5 on esimerkki syvyysuuntaisesta etsinnästä.

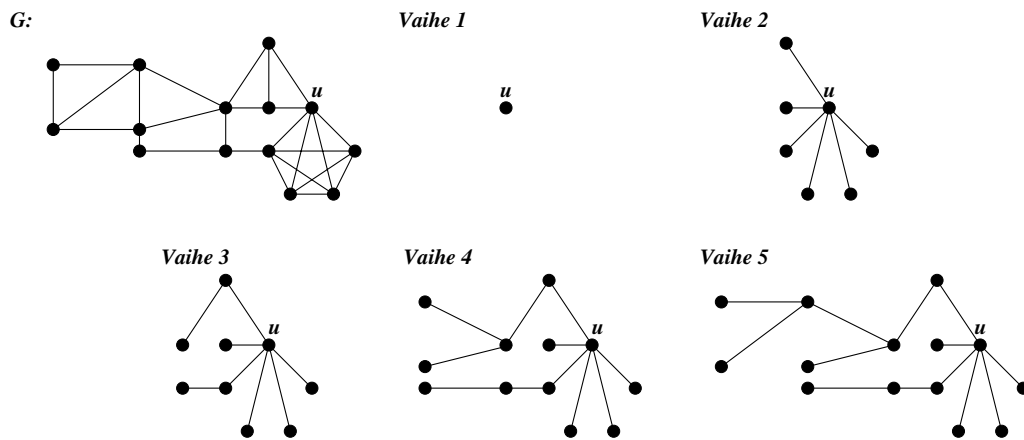
Algoritmi 3.3 (Leveysuuntainen etsintä). Leveysuuntaisessa etsinnässä virittävä puu muodostetaan seuraavasti.

1. Valitaan aloitussolmu mielivaltaisesti.
2. Lisätään kaikki särmit, joiden päätesolmuna aloitussolmu on, ja särmiä vastaavat toiset päätesolmut, mutta kuitenkin niin, että ei synny silmukoita.
3. Jos tarpeen, toimitaan kunkin lisätyn solmun osalta kuten kohdassa 2.
4. Jatketaan menettelyä (kohta 3) kunnes kaikki solmut on saavutettu.



Kuva 3.5. Syvyysuuntainen etsintä. Aloitussolmuna on solmu u .

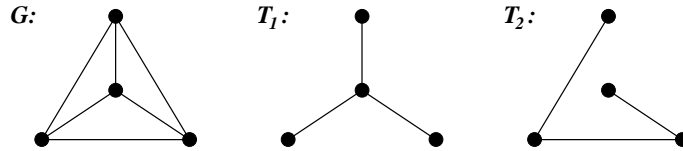
Jos leveysuuntaisen etsinnän lähtögraafi on yksinkertainen graafi, ei kohdassa 2 tarvitse aloitussolmusta lähdettäessä varmistaa, että silmukoita ei synny. Kuvassa 3.6 on esimerkki leveysuuntaisesta etsinnästä.



Kuva 3.6. Leveysuuntainen etsintä. Aloitussolmuna on solmu u .

Silmukoita poistamalla on mahdollista saada tulokseksi mikä tahansa yksittäinen virittävä puu. Syvyysuuntaisella tai leveysuuntaisella etsinnällä tämä ei välttämättä ole mahdollista.

Esimerkki 3.2. Kuvan 3.7 puu T_1 on graafin G virittävä puu, jota ei ole mahdollista saada syvyysuuntaisella etsinnällä, ja T_2 on graafin G virittävä puu, jota ei ole mahdollista saada leveysuuntaisella etsinnällä.



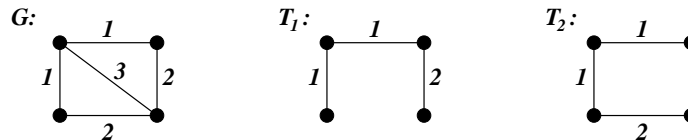
Kuva 3.7. Graafi G ja kaksi graafin G virittävää puuta.

3.4 Minimaalinen virittävä puu

Painotetun graafin särmille on määritelty paino ja graafin jonkin virittävän puun särmien painojen summa on pienin. Tämän puun etsiminen on yksi algoritmisen graafiteorian ongelmista. Käymme seuraavaksi esimerkinomaisesti läpi tämän ongelman ratkaisuja.

Määritelmä 3.3. Yhtenäisen painotetun graafin *minimaalinen virittävä puu* (*minimum weight spanning tree*) on graafin virittävä puu, jonka särmien painojen summa on pienin.

Minimaalinen virittävä puu ei välttämättä ole yksikäsitteinen (ks. kuva 3.8).

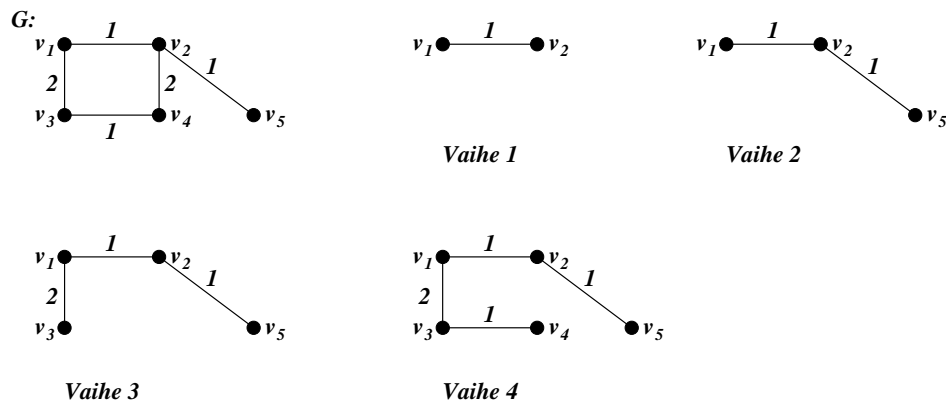


Kuva 3.8. Graafin G minimaaliset virittävät puut T_1 ja T_2 .

Minimaalisen virittävän puun konstruointiin on olemassa kaksi perusalgoritmiä: *Primin algoritmi* ja *Kruskalin algoritmi*. Menetelmistä esitetään vain yleiset pääpiirteet ja menetelmien toimivuuden todistaminen sivuutetaan (ks. esimerkiksi Thulasiraman & Swamy [17], s. 324–327). Eri menetelmillä saadaan mahdollisesti eri minimaalinen virittävä puu ja kummassakin menetelmässä tulos voi vielä riippua yksityiskohtien toteutustavasta.

Algoritmi 3.4 (Primin algoritmi). Primin algoritmilla minimaalinen virittävä puu muodostetaan seuraavasti.

1. Otetaan särmä, jonka paino on pienin ja joka ei ole luuppi.
2. Lisätään pienipainoisin särmä, joka on yhteydessä jo muodostettuun virittävän puun osaan ja joka ei synnytä silmukkaa.
3. Jatketaan menettelyä (kohta 2) kunnes särmiä on yksi vähemmän kuin alkuperäisen graafin solmuja.

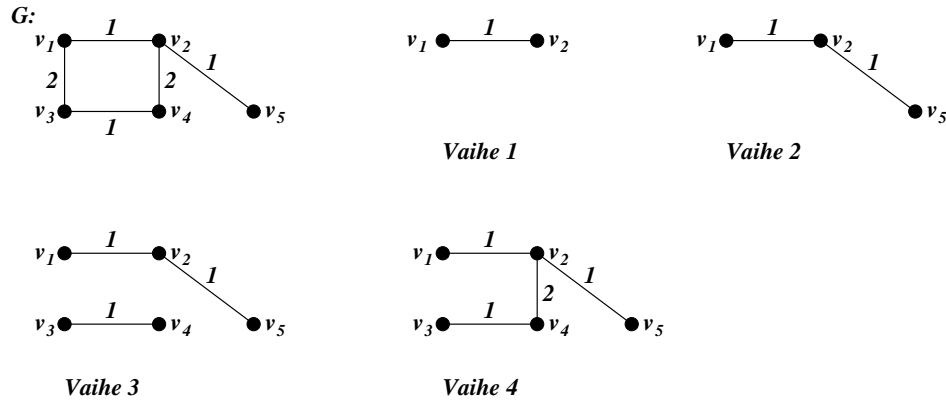


Kuva 3.9. Graafin G minimaalinen virittävä puu Primin algoritmilla.

Algoritmi 3.5 (Kruskalin algoritmi). Kruskalin algoritmilla minimaalinen virittävä puu muodostetaan seuraavasti.

1. Otetaan särmä, jonka paino on pienin ja joka ei ole luuppi.
2. Lisätään pienipainoisin särmä, joka ei synnytä silmukkaa.
3. Jatketaan menettelyä (kohta 2) kunnes särmiä on yksi vähemmän kuin alkuperäisen graafin solmuja.

Kuvassa 3.9 on esimerkki graafin minimaalisen virittävän puun muodostamisesta Primin algoritmilla ja kuvassa 3.10 Kruskalin algoritmilla. Sekä Primin että Kruskalin algoritmin suoritus alkaa jonkin pienipainoisimman särmän valinnalla. Seuraavaksi osoitamme, että jokainen pienipainoisin särmä kuuluu aina johonkin minimaaliseen virittävään puuhun.



Kuva 3.10. Graafin G minimaalinen virittävä puu Kruskalin algoritmilla.

Lause 3.12. Jokainen pienipainoisin särmä, joka ei ole luuppi, kuuluu painotetun graafin johonkin minimaaliseen virittävään puuhun.

Todistus. Olkoon e graafin G jokin pienipainoisin särmä ja T graafin G jokin minimaalinen virittävä puu. Jos e on puun T särmä, asia on selvä. Jos e ei ole puun T särmä, graafissa $T + e$ on silmukka C . Olkoon e' silmukan C pienipainoisin särmä, joka ei ole särmä e . Nyt graafi $T + e - e'$ on yhtenäinen ja siinä on yhtä monta särmää kuin puussa T . Siis lauseen 3.6 kohtien 1 ja 3 perusteella $T + e - e'$ on puu, joka virittää graafin G . Koska $w(e) \leq w(e')$, niin $w(T + e - e') = w(T) + w(e) - w(e') \leq w(T)$. Edelleen, koska T on minimaalinen virittävä puu, niin $w(T + e - e') = w(T)$. Siis $T + e - e'$ on myös graafin G minimaalinen virittävä puu ja e on sen särmä.

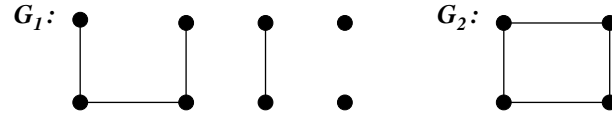
□

3.5 Metsä

Seuraavaksi määritellään (virittäviä) metsiä ja k -puita eli graafeja, joiden komponentit ovat puita.

Määritelmä 3.4. *Metsä (forest)* on suuntaamaton silmukaton graafi. Metsän aligraafi on metsän *alimetsä*. Jos metsä on graafin G aligraafi, kyseessä on graafin G alimetsä. Metsää, jossa on k komponenttia, kutsutaan *k -puuksi (k -tree)*.

Metsän komponentit ovat siis puita. Yhtenäinen metsä on puu, metsän yhtenäinen aligraafi on metsän alipuu ja 1-puu on puu.

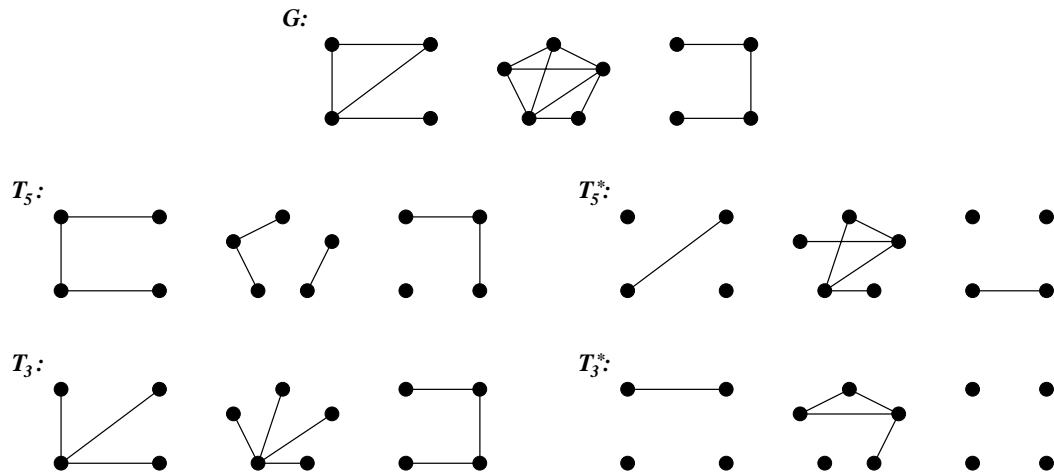


Kuva 3.11. Graafi G_1 on metsä, mutta graafi G_2 ei ole metsä.

Määritelmä 3.5. Graafin G virittävä k -puu (*spanning k -tree*) on graafin G k -komponenttinen alimetsä, joka sisältää kaikki graafin G solmut. Jos $T = (V, E)$ on graafin G virittävä k -puu, niin $T^* = G - E$ on graafin G virittävä k -vastapuu (*cospanning k -tree*).

Määritelmä 3.6. Graafin G virittävä k -puu on graafin G virittävä metsä, jos k on graafin G komponenttien lukumäärä. Jos $T = (V, E)$ on graafin G virittävä metsä, niin $T^* = G - E$ on graafin G virittävä vastametsä (*spanning co-forest*).

Kuvassa 3.12 on esimerkki graafin virittävästä metsästä ja graafin virittävästä k -puusta.



Kuva 3.12. Graafi G ja graafin G virittävä 5-puu T_5 ja sen virittävä 5-vastapuu T_5^* sekä virittävä metsä T_3 ja sen virittävä vastametsä T_3^* .

Graafilla voi olla useita virittäviä k -puita ja virittäviä metsiä. Virittävä k -vastapuu (metsä) ei yleensä ole k -puu (metsä). Yhtenäisen graafin virittävä metsä on graafin virittävä puu.

Lause 3.13. Olkoon G jokin n -solmuinen m -särmäinen graafi ja T jokin graafin G virittävä k -puu. Tällöin k -puussa T on $n - k$ särmää ja virittävässä k -vastapuuissa T^* on $m - n + k$ särmää.

Todistus. Olkoot T_i virittävän k -puun T komponentit ja n_i komponenttien solmujen lukumäärät ($i = 1, 2, \dots, k$). Koska kaikki komponentit ovat puita, kunkin komponentin T_i särmien lukumäärä on lauseen 3.2 perusteella $n_i - 1$. Särmiä k -puussa T on siis yhteensä

$$\sum_{i=1}^k (n_i - 1) = \sum_{i=1}^k n_i - k = n - k.$$

Vastapuuhun T^* jää tällöin $m - (n - k) = m - n + k$ särmää. □

Koska n -solmuisen, m -särmäisen ja k -komponenttisen graafin G aste on $n - k$ ja nulliteetti $m - n + k$, erikoistapaus lauseen 3.13 tuloksesta voidaan esittää myös graafin asteen $\rho(G)$ ja nulliteetin $\mu(G)$ avulla.

Seuraus 3.14. *Olkoon T jokin graafin G virittävä metsä ja T^* vastaava virittävä vastametsä. Tällöin metsässä T on $\rho(G)$ särmää ja vastametsässä T^* on $\mu(G)$ särmää.*

Seuraava lause kertoo, milloin graafilla on virittävä k -puu.

Lause 3.15. *Olkoon G graafi, jossa on n solmua ja p komponenttia. Tällöin graafilla G on virittävä k -puu täsmälleen silloin, kun $p \leq k \leq n$.*

Todistus. Oletetaan ensiksi, että graafilla G on virittävä k -puu T . Koska k -puussa T on n solmua, niin k -puussa T on korkeintaan n komponenttia. Siis $k \leq n$. Toisaalta, jos $k < p$, niin graafin G jonkin komponentin solmut eivät ole k -puun T solmuja. Täten T ei viritä graafia G . Siis $p \leq k$.

Oletetaan seuraavaksi, että $p \leq k \leq n$. Koska kaikki graafin G komponentit ovat yhtenäisiä, jokaisella graafin G komponentilla on lauseen 3.9 perusteella virittävä puu. Näiden puiden unioni on graafin G virittävä p -puu, jossa on lauseen 3.13 mukaan $n - p$ särmää. Koska jokainen särmän poisto jakaa puun kahdeksi komponentiksi, niin poistamalla p -puusta särmää särmä kerrallaan saadaan viritettävät $(p + 1)$ -, $(p + 2)$ -, \dots , n -puut. □

Seuraus 3.16. *Graafilla on aina virittävä metsä.*

3.6 Silmukka ja irrotusjoukko

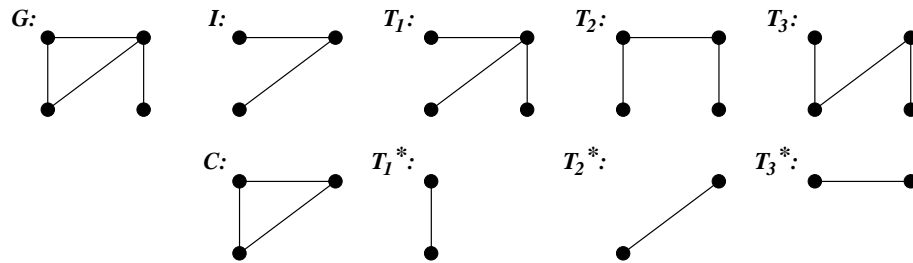
Seuraavaksi tarkastelemme silmukoiden ja irrotusjoukkojen suhdetta virittäviin puihin ja vastapuihin. Yksinkertaisuuden vuoksi tulkitsemme silmukat graafeiksi ja irrotusjoukot särmäindusoiduiksi graafeiksi. Seuraava tulos seuraa suoraan lauseesta 3.10.

Lause 3.17. *Yhtenäisen graafin G irrotusjoukko sisältää ainakin yhden särmän jokaisesta graafin G virittävästä puusta.*

Seuraava lause antaa vastaavan tuloksen silmukoille.

Lause 3.18. *Yhtenäisen graafin G silmukka sisältää ainakin yhden särmän jokaisesta graafin G virittävästä vastapuusta.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että on olemassa sellainen graafin G silmukka C ja sellainen graafin G virittävä vastapuu T^* , että niissä ei ole yhteisiä särmäiä. Silloin C on on puun T aligraafi eli puussa T on silmukka, mikä on mahdotonta. \square



Kuva 3.13. Silmukka C sisältää särmän jokaisesta graafin G virittävästä vastapuusta, ja irrotusjoukko I särmän jokaisesta virittävästä puusta.

Lause 3.19. *Yhtenäisen graafin G särmäjoukko I on graafin G irrotusjoukko täsmälleen silloin, kun I on minimaalinen joukko, joka sisältää särmän jokaisesta graafin G virittävästä puusta.*

Todistus. Oletetaan ensiksi, että I on yhtenäisen graafin G irrotusjoukko. Silloin lauseen 3.17 mukaan I sisältää ainakin yhden särmän jokaisesta graafin G virittävästä puusta. Olkoon $I' \subset I$ ja tehdään vastaoletus, että joukkoon I' kuuluu särmä jokaisesta graafin G virittävästä puusta. Silloin $G - I'$ ei ole yhtenäinen, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että I on graafin G irrotusjoukko.

Oletetaan seuraavaksi, että F on minimaalinen joukko, joka sisältää särmän graafin G jokaisesta virittävästä puusta. Tehdään vastaoletus, että F ei silti ole graafin G irrotusjoukko. Nyt $G - F$ ei sisällä yhtään graafin G virittävää puuta, joten $G - F$ ei ole yhtenäinen. Koska F ei kuitenkaan ole graafin G irrotusjoukko, on olemassa sellainen joukon F aito osajoukko F' , että F' on graafin G irrotusjoukko. Täten joukossa F' on lauseen 3.17 mukaan särämä jokaisesta graafin G virittävästä puusta. Siis F ei ole minimaalinen joukko, joka sisältää särmän graafin G jokaisesta virittävästä puusta.

□

Lause 3.20. *Yhtenäisen graafin G aligraafi C on graafin G silmukka täsmälleen silloin, kun C on minimaalinen graafi, joka sisältää särmän graafin G jokaisesta virittävästä vastapuusta.*

Todistus. Oletetaan ensiksi, että C on graafin G silmukka. Silloin lauseen 3.18 perusteella C sisältää ainakin yhden särmän jokaisesta graafin G virittävästä vastapuusta. Olkoon C' graafin C aito aligraafi. Silloin C' on silmukaton, joten lauseen 3.11 mukaan C' on jonkin graafin G virittävän puun T aligraafi. Silloin vastaavan virittävän vastapuun T^* yksikään särämä ei ole aligraafin C' särämä.

Oletetaan seuraavaksi, että C on minimaalinen graafi, jossa on särämä jokaisesta graafin G virittävästä vastapuusta. Jos C on silmukaton, niin lauseen 3.11 mukaan C on graafin G jonkin virittävän puun aligraafi. Tämä on mahdotonta, koska graafissa C on särämä jokaisesta graafin G virittävästä vastapuusta. Siis C sisältää silmukan. Olkoon nyt C' graafin C aito aligraafi. Koska C on minimaalinen, graafissa C' ei ole graafin G jonkin virittävän vastapuun T^* särmiä. Täten C' on puun T aligraafi eli graafi C' on silmukaton. Siis kaikki graafin C särmit ovat saman silmukan särmiä. Siis C on silmukka.

□

Lause 3.21. *Yhtenäisen graafin silmukalla ja irrotusjoukolla on aina parillinen määrä yhteisiä särmiä.*

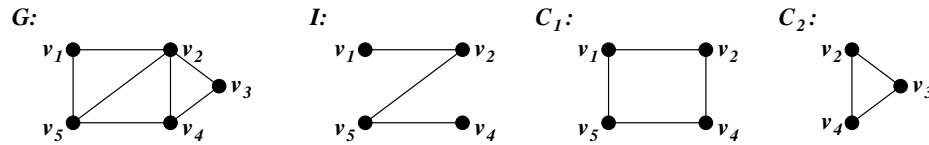
Todistus. Olkoon G yhtenäinen graafi, C graafin G silmukka ja I graafin G irrotusjoukko. Nyt $G - I$ on epäyhtenäinen ja siinä on kaksi komponenttia G_1 ja G_2 .

Jos C on jommankumman komponentin aligraafi, silmukalla C ja irrotusjoukolla I ei ole yhteisiä särmiä. Näin ollen väite on tosi. Oletetaan siis, että C ei ole kummankaan komponentin aligraafi. Olkoon v silmukan C solmu. Kuljettaessa pitkin silmukkaa C lähtien solmusta v ja palaten solmuun v kaikki kohdattavat

irrotusjoukon I särmät ovat komponenttien G_1 ja G_2 välillä eli niitä pitkin siirrytään komponentista toiseen. Koska alku- ja loppusolmu v on sama, komponentista toiseen siirrytään parillinen määrä kertoja. Siis silmukan C ja irrotusjoukon I leikkauksessa on parillinen määrä särmiä.

□

Esimerkki 3.3. Kuvan 3.14 graafin G irrotusjoukolla I on silmukan C_1 kanssa kaksi yhteistä särmää ja silmukan C_2 kanssa nolla yhteistä särmää.



Kuva 3.14. Graafi, sen irrotusjoukko ja kaksi silmukkaa.

3.7 Perussilmukka ja perusirrotusjoukko

Graafin virittävien puiden ja -vastapuiden avulla voidaan muodostaa graafin irrotusjoukkoja ja silmukoita. Seuraava tulos seuraa suoraan lauseesta 3.6.

Lause 3.22. *Olkoon $G = (V, E)$ yhtenäinen graafi ja $T = (V, F)$ jokin graafin G virittävä puu sekä T^* vastaava virittävä vastapuu. Jos c on virittävän vastapuun T^* särmä, niin graafissa $(V, F \cup \{c\})$ on täsmälleen yksi silmukka.*

Lauseen 3.22 tulokseen perustuen voidaan esittää seuraavat määritelmät.

Määritelmä 3.7. *Olkoon $G = (V, E)$ yhtenäinen graafi, $T = (V, F)$ jokin graafin G virittävä puu ja $c \in E \setminus F$. Tällöin graafin $(V, F \cup \{c\})$ ainoa silmukkaa sanotaan graafin G särmiä c vastaavaksi *perussilmukaksi* (*fundamental circuit*) puun T suhteen.*

Määritelmä 3.8. *Olkoon G jokin n -solmuinen ja m -särmäinen yhtenäinen graafi, T graafin G jokin virittävä puu ja T^* puuta T vastaava virittävä vastapuu. Olkoot edelleen $c_1, c_2, \dots, c_{m-n+1}$ virittävän vastapuun T^* särmät ja $C_1, C_2, \dots, C_{m-n+1}$ näitä särmiä vastaavat perussilmukat. Tällöin joukkoa $\{C_1, C_2, \dots, C_{m-n+1}\}$ sanotaan graafin G *perussilmukkajoukoksi* (*fundamental set of circuits*) puun T suhteen.*

Puun perusominaisuuksiin nojautuen on helppo osoittaa, että jos b on puun T särmä, niin graafissa $T - b$ on täsmälleen kaksi komponenttia. Näin ollen voimme esittää seuraavan lauseen.

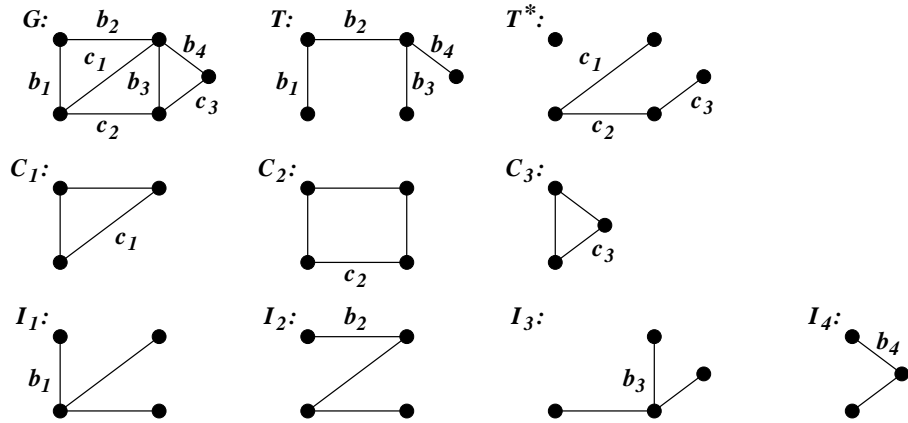
Lause 3.23. *Olkoon G yhtenäinen graafi, T jokin graafin G virittävä puu ja b jokin virittävän puun T särmä. Olkoot edelleen $T_1 = (V_1, E_1)$ ja $T_2 = (V_2, E_2)$ graafin $T - b$ komponentit. Tällöin irrotus $\langle V_1, V_2 \rangle$ on graafin G irrotusjoukko.*

Todistus. Koska T_1 on solmujoukon V_1 ja T_2 solmujoukon V_2 indusoiman graafin G aligraafin virittävä puu, solmujoukkojen V_1 ja V_2 indusoimat graafin G aligraafit ovat lauseen 3.9 nojalla yhtenäisiä. Siis lauseen 2.21 nojalla irrotus $\langle V_1, V_2 \rangle$ on graafin G irrotusjoukko. □

Lauseen 3.23 tulokseen perustuen voidaan esittää seuraavat määritelmät.

Määritelmä 3.9. *Olkoon G yhtenäinen graafi, T jokin graafin G virittävä puu ja b virittävän puun T särmä. Olkoot edelleen $T_1 = (V_1, E_1)$ ja $T_2 = (V_2, E_2)$ graafin $T - b$ komponentit. Tällöin irrotusjoukkoa $\langle V_1, V_2 \rangle$ sanotaan graafin G särmää b vastaavaksi perusirrotusjoukoksi (*fundamental cutset*) puun T suhteen.*

Määritelmä 3.10. *Olkoot b_1, b_2, \dots, b_{n-1} jonkin n -solmuisen yhtenäisen graafin G virittävän puun T oksat ja olkoot I_1, I_2, \dots, I_{n-1} näitä oksia vastaavat perusirrotusjoukot puun T suhteen. Tällöin joukkoa $\{I_1, I_2, \dots, I_{n-1}\}$ sanotaan graafin G perusirrotusjoukkojen joukoksi (*fundamental set of cutsets*) puun T suhteen.*



Kuva 3.15. Graafin G perussilmukat ja perusirrotusjoukot puun T suhteen.

Koska yhtenäisen n -solmuisen ja m -särmäisen graafin jokaisessa virittävässä puussa on $n - 1$ särmää ja jokaisessa virittävässä vastapuussa on $m - n + 1$ särmää, niin perussilmukoita on $m - n + 1$ kappaletta ja perusirrotusjoukkoja on $n - 1$ kappaletta. Perussilmukat muodostetaan lisäämällä virittävään puuhun T vuorotellen kaikki virittävän vastapuun särmät ja etsimällä muodostuneet silmukat. Perusirrotusjoukot taas muodostetaan poistamalla virittävästä puusta vuorotellen kaikki särmät ja etsimällä muodostuneita kahta solmujoukkoa vastaavat irrotusjoukot (ks. kuva 3.15).

Kukin perussilmukka C_i sisältää virittävästä vastapuusta T^* täsmälleen yhden särmän c_i , joka ei esiinny missään muussa perussilmukkajoukon silmukassa. Samoin kukin virittävän puun T särmä b_i kuuluu täsmälleen yhteen perusirrotusjoukkojen joukon irrotusjoukkoon I_i . Näin ollen mitään perussilmukkaa ei voida esittää muiden perussilmukoiden rengassummana eikä mitään perusirrotusjoukkoa muiden perusirrotusjoukkojen rengassummana. Siis perussilmukkajoukko ja perusirrotusjoukkojen joukko ovat rengassumman suhteen (lineaarisesti) riippumattomia.

Lause 3.24. *Yhtenäisen graafin G virittävän vastapuun T^* särmää c vastaava perussilmukka (virittävän puun T suhteen) sisältää täsmälleen ne puun T särmät, joita vastaavat perusirrotusjoukot (puun T suhteen) sisältävät särmän c .*

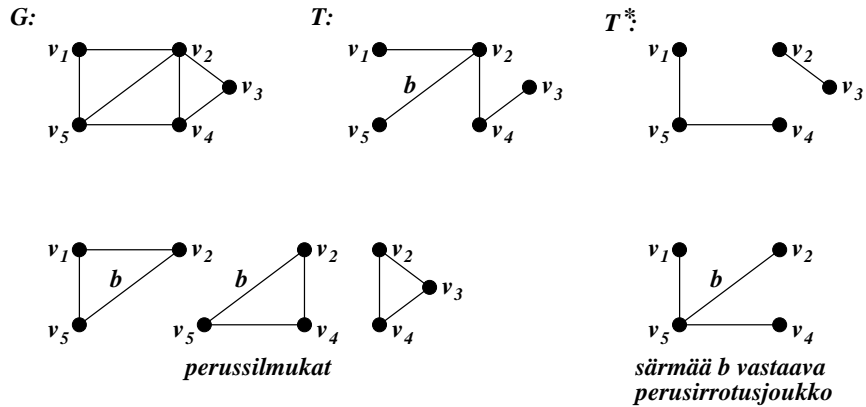
Todistus. Olkoon $C = \{c, b_1, b_2, \dots, b_k\}$ särmää c vastaava perussilmukka virittävän puun T suhteen. Olkoon edelleen I_i särmää b_i vastaava perusirrotusjoukko puun T suhteen ($i = 1, 2, \dots, k$). Silloin b_i on silmukan C , irrotusjoukon I_i ja puun T ainoa yhteinen särmä. Toisaalta c on ainoa vastapuun T^* särmä silmukassa C . Koska silmukalla C ja irrotusjoukolla I_i on lauseen 3.21 mukaan parillinen määrä yhteisiä särmä, on c myös graafin I_i särmä.

Oletetaan nyt, että c on myös jotakin virittävän puun T särmää $d \neq b_i$ vastaavan perusirrotusjoukon I' särmä ($i = 1, 2, \dots, k$). Tällöin c on irrotusjoukon I' ja silmukan C ainoa yhteinen särmä, mikä lauseen 3.21 mukaan on mahdotonta.

□

Seuraava lause todistetaan kuten lause 3.24. Todistus jätetään harjoitustehtäväksi.

Lause 3.25. *Yhtenäisen graafin G virittävän puun T särmää b vastaava perusirrotusjoukko (virittävän puun T suhteen) sisältää täsmälleen ne vastapuun T^* särmät, joita vastaavat perussilmukat (puun T suhteen) sisältävät särmän b .*



Kuva 3.16. Särmää b vastaava perusirrotusjoukko sisältää ne vastapuun T^* särmät, joita vastaavat perussilmukat sisältävät särmän b .

3.8 Graafin vektoriavaruus

Luvun 3 lopuksi esitämme vielä lyhyesti muutamia graafin vektoriavaruutta koskevia tuloksia. Tässä luvussa oletamme algebran ja lineaarialgebran peruskäsitteet tunnetuiksi (ks. esimerkiksi Fraleigh [7] ja Friedberg, Insel & Spence [8]). Lisäksi pidämme nollagraafia (ks. s. 1) graafina, koska jokaisessa vektoriavaruudessa on oltava nollavektori.

Kukin graafi määrittää vektoriavaruuden yli kunnan $GF(2)$ (eli kunnan \mathbb{Z}_2), jossa graafin särmäindusoidut aligraafit ovat vektoreita ja vektorien yhteenlaskuna on rengassumma.

Lause 3.26. *Olkoon $G = (V, E)$ jokin m -särmäinen graafi ja*

$$W_G = \{\langle E_i \rangle \mid E_i \subseteq E\}.$$

Silloin W_G on m -dimensioinen vektoriavaruus yli kunnan $GF(2)$.

Todistus. Sivuutetaan, ks. Thulasiraman & Swamy [17], s. 80–81.

□

Koska jokainen särmäjoukon E osajoukko E_i särmäindusoi graafin $\langle E_i \rangle$, vektoriavaruutta W_G voidaan ajatella myös kaikkien joukon E osajoukkojen vektoriavaruutena (eli $W_G = P(E)$). Vektorien yhteenlaskuna on tällöin symmetrinen erotus.

Lause 3.27. *Olkoon W_C graafin G silmukoiden ja särmiltään erillisten silmukoiden unionien joukko. Tällöin W_C on vektoriavaruuden W_G aliavaruus, jota sanotaan graafin G silmukka-avaruudeksi (circuit subspace).*

Todistus. Sivuuetaan, ks. esimerkiksi Thulasiraman & Swamy [17], s. 82. □

Lause 3.28. *Olkoon W_S graafin G irrotusjoukkojen ja särmiltään erillisten irrotusjoukkojen unionien joukko. Tällöin W_S on vektoriavaruuden W_G aliavaruus, jota sanotaan graafin G irrotusavaruudeksi (cutset subspace).*

Todistus. Sivuuetaan, ks. esimerkiksi Thulasiraman & Swamy [17], s. 85. □

Lause 3.29. *Yhtenäisen graafin G perussilmukat (jonkin virittävän puun suhteen) muodostavat graafin G silmukka-avaruuden kannan.*

Todistus. Olkoon W_C yhtenäisen graafin G silmukka-avaruus ja C jokin avaruuden W_C graafi. Olkoon edelleen T graafin G virittävä puu ja T^* vastaava virittävä vastapuu. Lauseen 3.18 nojalla $T^* \cap C \neq \emptyset$, joten voidaan merkitä $T^* \cap C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$. Olkoon lisäksi C_i ($i = 1, 2, \dots, k$) särmää c_i vastaava perussilmukka puun T suhteen. Merkitään vielä $C' = C_1 \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C_k$. Koska aliavaruus on suljettu vektoriavaruuden laskutoimituksen suhteen, niin lauseen 3.27 nojalla $C \oplus C' \in W_C$. Toisaalta $C \oplus C' \subseteq T$, sillä särmät c_1, c_2, \dots, c_k kuuluvat sekä joukkoon C että joukkoon C' . Siis $C \oplus C'$ on silmukaton. Näin ollen ainoa mahdollisuus on, että $C \oplus C'$ on nollagraafi ja siis $C = C'$.

Siis C voidaan esittää perussilmukoiden C_1, C_2, \dots, C_k lineaarikombinaationa. Toisaalta, koska jokaisessa perussilmukassa on särmä, jota ei ole missään muussa perussilmukassa, perussilmukat ovat lineaarisesti riippumattomia. Siis perussilmukat muodostavat silmukka-avaruuden W_C kannan. □

Seuraus 3.30. *Yhtenäisen graafin G silmukka-avaruus on $\mu(G)$ -dimensioinen.*

Todistus. Koska yhtenäisessä graafissa on täsmälleen yksi komponentti, seuraa tulos suoraan seurauksesta 3.14 ja lauseesta 3.29. □

Lause 3.31. *Yhtenäisen graafin G perusirrotusjoukot (jonkin virittävän puun suhteen) muodostavat graafin G irrotusavaruuden kannan.*

Todistus. Lause todistetaan vastaavalla tavalla kuin lause 3.29.

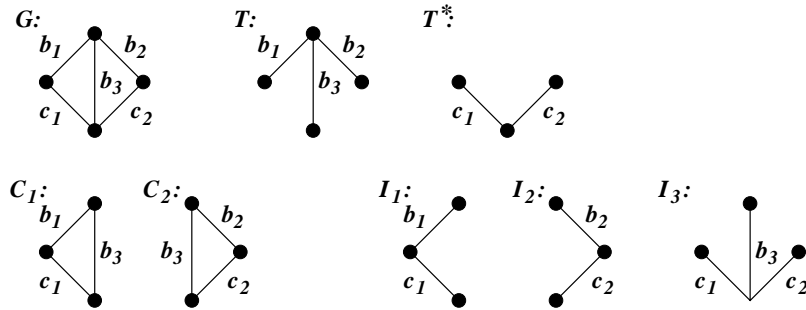
□

Seuraus 3.32. *Yhtenäisen graafin G irrotusavaruus on $\rho(G)$ -dimensioinen.*

Todistus. Koska yhtenäisessä graafissa on täsmälleen yksi komponentti, seuraa tulos suoraan seurauksesta 3.14 ja lauseesta 3.31.

□

Esimerkki 3.4. Kuvan 3.17 graafin G aste $\rho(G)$ on kolme ja nulliteetti $\mu(G)$ on kaksi. Siis graafin G silmukka-avaruus W_C on kaksidimensioinen ja irrotusavaruus W_S kolmedimensioinen. Edelleen perussilmukat C_1 ja C_2 muodostavat silmukka-avaruuden W_C yhden kannan ja perusirrotusjoukot I_1 , I_2 ja I_3 muodostavat irrotusavaruuden W_S yhden kannan.



Kuva 3.17. Graafi G ja sen perussilmukat ja perusirrotusjoukot puun T suhteen.

Lause 3.33. *Aliavaruudet W_C ja W_S ovat vektorivaruuden W_G ortogonaalikomponentit täsmälleen silloin, kun $W_C \cap W_S = \emptyset$.*

Todistus. Sivuutetaan, ks. esimerkiksi Thulasiraman & Swamy [17], s. 91.

□

Jos siis $W_C \cap W_S = \emptyset$, vektorivaruuden W_G kanta saadaan lauseen 3.33 perusteella ”yhdistämällä” aliavaruuksien W_C ja W_S kannat. Siis jokainen graafin G särmäindusoitu aligraafi voidaan esittää kahden graafin rengassummana siten, että toinen graafi kuuluu joukkoon W_C ja toinen joukkoon W_S . Jos taas $W_C \cap W_S \neq \emptyset$, tämä ei yleisesti ottaen ole mahdollista. Tällöinkin kuitenkin itse graafi G voidaan esittää edellä mainitulla tavalla kahden aligraafinsa rengassummana, mikä nähdään seuraavasta lauseesta.

Lause 3.34. *Jokainen graafi voidaan esittää kahden aligraafinsa rengassummana siten, että toinen aligraafi kuuluu aliavaruuteen W_C ja toinen aliavaruuteen W_S .*

Todistus. Sivutetaan, ks. esimerkiksi Chen [4] ja Williams & Maxwell [20].

□

Esimerkki 3.5. Koska kuvan 3.17 graafille $C_1 \oplus C_2 = I_1 \oplus I_2$, niin $W_C \cap W_S \neq \emptyset$. Siis W_C ja W_S eivät ole lineaariavaruuden W_G ortogonaalikomponentit. Näin ollen on olemassa graafin G särmäindusoitu aligraafi (esimerkiksi $\langle b_1 \rangle$), jota ei voi esittää joukon W_C graafin ja joukon W_S graafin rengassummana. Kuitenkin $G = C_1 \oplus I_2$, joten itse graafi G voidaan esittää ko. tavalla.

Luku 4

Erilaisia graafeja

Seuraavaksi tarkastelemme lyhyesti muutamia graafin ominaisuuksia. Vaikka olisi perusteltua tarkastella kutakin asiakokonaisuutta huomattavasti laajemmin, joudumme tässä tyytymään asioiden pääpiirteiden esittelyyn.

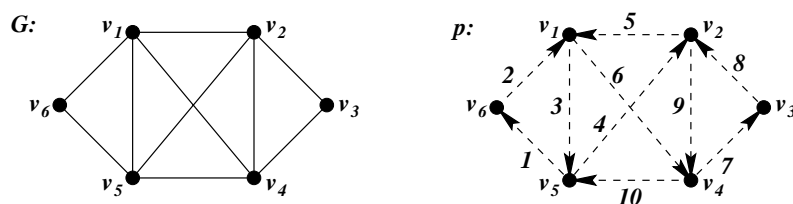
4.1 Eulerin graafi

Eulerin graafien tarkastelun alkuna ja itse asiassa koko graafiteorian alkuna oli ns. Königsbergin siltaongelma (ks. esimerkki 4.2): onko mahdollista lähteä jostakin paikasta ja palata takaisin lähtöpaikkaan niin, että on kulkenut jokaisen sillan kautta täsmälleen kerran. Euler julkaisi tämän ongelman ratkaisun vuonna 1736.

Määritelmä 4.1. Graafin polku (piiri) on *Eulerin polku (piiri)*, jos se sisältää graafin jokaisen särmän täsmälleen kerran. Yhtenäinen epätriviaali graafi on *Eulerin graafi*, jos siinä on Eulerin piiri.

Esimerkki 4.1. Kuvan 4.1 graafissa on esimerkiksi Eulerin piiri $p: v_5, v_6, v_1, v_5, v_2, v_1, v_4, v_3, v_2, v_4, v_5$.

Eulerin polku tai piiri on aina yksinkertainen, koska siinä ei ole samaa särmää kahdesti.



Kuva 4.1. Graafissa G on Eulerin piiri p .

Lause 4.1. *Olkoon G jokin yhtenäinen epätriviaali graafi. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.*

1. *Graafi G on Eulerin graafi.*
2. *Graafin G jokaisen solmun aste on parillinen.*
3. *Graafi G on joidenkin särmiltään erillisten silmukoiden unioni.*

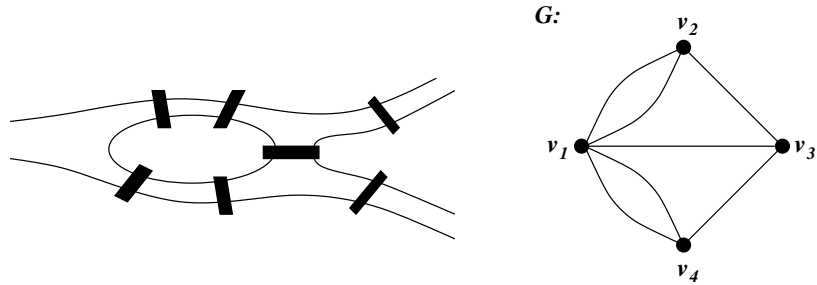
Todistus. (i) Osoitetaan ensiksi, että Eulerin graafin G jokaisen solmun aste on parillinen. Olkoon v jokin graafin G solmu ja p jokin graafin G Eulerin piiri. Koska G on yhtenäinen ja p on Eulerin piiri, voidaan todistuksen yleisyyttä rajoittamatta olettaa, että p alkaa solmusta v ja päättyy solmuun v . Olkoon siis $p: v, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, e_m, v$. Solmu v voi esiintyä useasti polulla p . Olkoon $v = v_{i_1} = v_{i_2} = \dots = v_{i_k}$. Nyt v on särmien $e_1, e_{i_1}, e_{i_1+1}, e_{i_2}, e_{i_2+1}, \dots, e_{i_k}, e_{i_k+1}$ ja e_m päätesolmu. Koska Eulerin piirissä ei sama särmä esiinny kahdesti, nämä särmät ovat joko eri särmiiä tai kaksi peräkkäistä särmää (esimerkiksi e_{i_j+1} ja $e_{i_{j+1}}$) ovat samat eli kyseessä on luuppi. Nyt $\deg(v) = 2(k+1)$, sillä jokainen solmuun v tuleva tai solmusta v lähtevä särmä kasvattaa astelukua yhdellä, paitsi luuppi, joka kasvattaa sitä kahdella.

(ii) Oletetaan seuraavaksi, että graafin G jokaisen solmun asteluku on parillinen, ja osoitetaan, että graafi on särmiltään erillisten silmukoiden unioni. Koska graafin G jokaisen solmun asteluku on vähintään 2, niin lauseen 3.5 mukaan G ei voi olla puu. Siis graafissa G on ainakin yksi silmukka C_1 . Olkoon $G_1 = G - C_1$. Koska silmukan C_1 jokaisen solmun asteluku on kaksi, myös graafin G_1 jokaisen solmun asteluku on parillinen.

Jos graafissa G_1 on vain eristettyjä solmuja, niin $G = C_1$ ja väite on tosi. Muussa tapauksessa graafissa G_1 on vielä ainakin yksi silmukka C_2 , koska mikään graafin G_1 komponenteista ei lauseen 3.5 mukaan voi olla epätriviaali puu. Olkoon nyt $G_2 = G_1 - C_2$ ja jatketaan vastaavasti, kunnes saadaan graafi G_n , jossa on vain eristettyjä solmuja. Silloin silmukoissa C_1, C_2, \dots, C_n ei ole yhteisiä särmiiä ja $G = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$.

(iii) Oletetaan lopuksi, että graafi G on särmiltään erillisten silmukoiden C_1, C_2, \dots, C_n unioni. Koska G on yhtenäinen graafi, voidaan silmukat indeksoida niin, että silmukoilla C_1 ja C_2 on yhteinen solmu v . Nyt graafista $C_1 \cup C_2$ löytyy Eulerin piiri, joka alkaa solmusta v ja kiertää kummankin silmukan. Koska G on yhtenäinen graafi, voidaan tähän unioniin lisätä silmukat C_3, C_4, \dots, C_n sellaisessa järjestyksessä, että lisättävällä silmukalla ja muodostetulla unionilla on yhteinen solmu. Koska sekä unionista että silmukasta löytyy Eulerin piiri, voidaan aina myös muodostaa uusi Eulerin piiri lisäämällä vanhaan piiriin yksi silmukka lisää. Siis lopulta unionissa $G = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$ on Eulerin piiri, joten graafi G on Eulerin graafi. \square

Esimerkki 4.2 (Königsbergin sillat). Königsbergin kaupunki Preussissa (nyk. Kaliningrad Venäjällä) on jakaantunut neljään osaan. Königsbergissä oli 1700-luvulla seitsemän siltaa. Kaupunkilaiset yrittivät löytää sunnuntaikävelyllä kotiovelta kotiovelle vievän reitin, joka kulkee jokaisen sillan ylitse täsmälleen kerran. Euler osoitti, että se on mahdotonta muodostamalla Königsbergin siltoja vastaavan graafin, jossa yhtenäiset maa-alueet ovat solmuja ja sillat särmiä (ks. kuva 4.2). Tämä graafi ei ole Eulerin graafi.



Kuva 4.2. Königsbergin sillat ja siltoja vastaava multigraafi G .

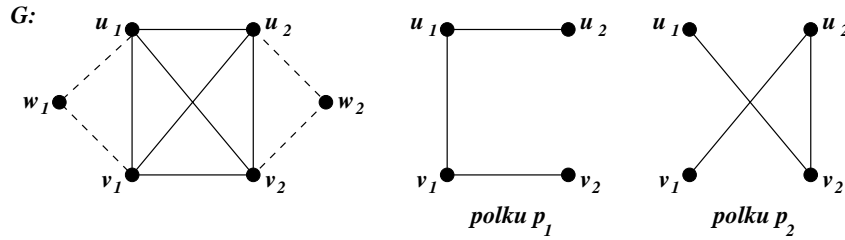
Seuraava lause seuraa suoraan lauseesta 4.1.

Lause 4.2. *Jokainen Eulerin graafin solmu kuuluu johonkin silmukkaan.*

Seuraavaksi tarkastelemme, kuinka monella kynänvedolla graafi voidaan piirtää, jos sen paritonasteisten solmujen lukumäärä tiedetään.

Lause 4.3. *Olkoon $G = (V, E)$ yhtenäinen graafi, jossa on $2k$ ($k \geq 1$) paritonasteista solmua. Tällöin E voidaan jakaa epättyhjiin erillisiin osajoukkoihin E_1, E_2, \dots, E_k siten, että jokainen joukoista E_1, E_2, \dots, E_k muodostaa graafin G yksinkertaisen polun.*

Todistus. Olkoot v_1, v_2, \dots, v_k ja u_1, u_2, \dots, u_k graafin G paritonasteiset solmut. Muodostetaan graafi G' lisäämällä graafin G solmut w_1, w_2, \dots, w_k ja kustakin solmusta w_i särmä sekä solmuun v_i , että solmuun u_i ($i = 1, 2, \dots, k$). Nyt graafin G' jokaisen solmun aste on parillinen, joten siitä löytyy Eulerin piiri. Kun piiristä poistetaan solmut w_i ja niihin johtavat särmät, jäljelle jää k polkua. Näiden polkujen särmät muodostavat särmäjoukon E luokkajaon, jossa on k joukkoa. \square



Kuva 4.3. Graafi G ja kaksi sen yksinkertaista polkua.

Esimerkki 4.3. Kuvan 4.3 graafissa G on neljä paritonasteista solmua. Näin ollen graafin särmäjoukko voidaan jakaa kahteen epättyhjään joukkoon, joista kumpikin muodostaa graafin G yksinkertaisen polun (esimerkiksi polut p_1 ja p_2). Kuvan 4.3 solmut w_1 ja w_2 ovat lauseen 4.3 todistuksessa käytettäviä solmuja.

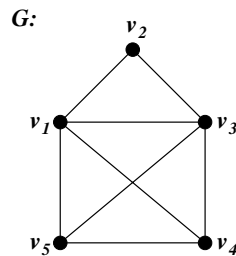
Lauseen 4.3 osajoukkoihin jako ei kuitenkaan ole välttämättä yksikäsitteinen. (Totea.)

Lause 4.4. *Yhtenäisessä graafissa G on Eulerin polku, muttei Eulerin piiriä täsmälleen silloin, kun täsmälleen kahden graafin G solmun aste on pariton.*

Todistus. Olkoon G graafi, jossa on Eulerin polku p , muttei Eulerin piiriä. Olkoot u ja v Eulerin polun p alku- ja loppusolmut. Muodostetaan graafi G' lisäämällä graafiin G solmu w ja särmät (u, w) ja (v, w) . Nyt graafissa G' on Eulerin piiri ja siis lauseen 4.1 perusteella jokaisen graafin G' solmun aste on parillinen. Näin ollen graafissa G on täsmälleen kaksi paritonasteista solmua, nimittäin solmut u ja v .

Olkoon nyt G graafi, jossa täsmälleen kahden solmun aste on pariton. Siis lauseen 4.1 mukaan graafissa G ei ole Eulerin piiriä. Toisaalta lauseen 4.3 mukaan graafissa G on Eulerin polku.

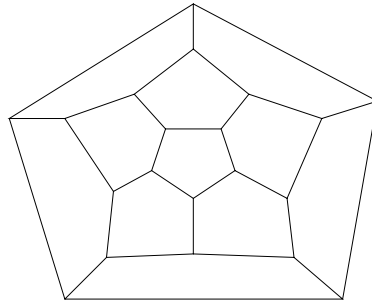
□



Kuva 4.4. Graafi G , jossa on Eulerin polku muttei Eulerin piiriä.

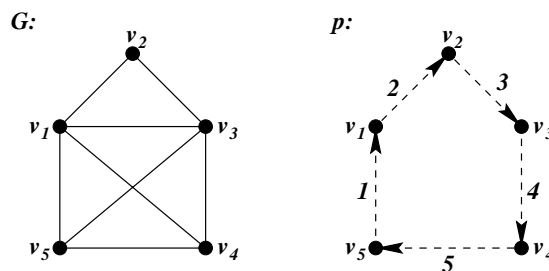
4.2 Hamiltonin graafi

Hamiltonin graafi on saanut nimensä irlantilaisen matemaatikon William Rowan Hamiltonin 1857 esittelemästä ”Round the World” -tehtävästä. Tehtävänä oli kiertää dodekaedrin kärjet särmiä pitkin niin, että käydään jokaisessa kärjessä vain kerran. Tehtävä itsessään tuli aikanaan ratkaistuksi ja tämä tehtävä antoi nimen kaikille sellaisille graafeille, joista löytyy suora polku tai silmukka, jossa on kaikki graafin solmut.



Kuva 4.5. Dodekaedri piirrettynä tasoon.

Määritelmä 4.2. Graafin polku (piiri, silmukka) on *Hamiltonin polku* (piiri, silmukka), jos se sisältää graafin jokaisen solmun täsmälleen kerran. Graafi on *Hamiltonin graafi*, jos siinä on Hamiltonin piiri.



Kuva 4.6. Graafissa G on Hamiltonin piiri p .

Vähintään kolmisolmuaisessa graafissa Hamiltonin piiri on aina myös Hamiltonin silmukka. Ei ole tiedossa yksinkertaista välttämätöntä ja riittävää ehtoa sille, että graafi olisi Hamiltonin graafi. Sen sijaan tunnetaan kylläkin useita välttämättömiä ja useita riittäviä ehtoja. Välttämättömiä ehtoja ovat mm. seuraavat.

Vähintään kolmisolmuaisessa Hamiltonin graafissa ei ole loppusolmuja eikä irrotussolmuja ja kaksijakoisen Hamiltonin graafin kummassakin solmujoukossa on yhtä monta solmua.

Seuraavaksi esitetään muutama riittävä ehto Hamiltonin graafille.

Lause 4.5. *Olkoon G yksinkertainen n -solmuinen graafi, jonka solmut on järjestetty niin, että*

$$\deg(v_1) \leq \deg(v_2) \leq \dots \leq \deg(v_n).$$

Jos tällöin

$$\deg(v_{n-k}) \geq n - k \text{ aina, kun } \deg(v_k) \leq k < n/2, \quad (4.1)$$

niin G on Hamiltonin graafi.

Todistus. Sivuutetaan, ks. esimerkiksi Thulasiraman & Swamy [17], s. 63–64. \square

Lause 4.6. *Olkoon $G = (V, E)$ yksinkertainen n -solmuinen ($n \geq 3$) graafi, jonka solmut on järjestetty niin, että*

$$\deg(v_1) \leq \deg(v_2) \leq \dots \leq \deg(v_n).$$

Tällöin G on Hamiltonin graafi, jos jokin seuraavista ehdoista on voimassa.

1. $\delta(G) \geq n/2$.
2. $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ aina, kun $u, v \in V$ ja $\{u, v\} \notin E$.
3. $\deg(v_k) > k$ aina, kun $1 \leq k < n/2$.
4. $\deg(v_j) + \deg(v_k) \geq n$ aina, kun $j < k$, $\deg(v_j) \leq j$ ja $\deg(v_k) \leq k - 1$.

Todistus. Osoitamme, että kun ensimmäinen ehto toteutuu, myös toinen ehto toteutuu, kun toinen ehto toteutuu, niin kolmas ehto toteutuu, kun kolmas ehto toteutuu, niin neljäs ehto toteutuu ja kun neljäs ehto toteutuu, niin silloin lauseen 4.5 ehto (4.1) toteutuu.

(i) Jos ensimmäinen ehto toteutuu, selvästikin myös toinen ehto toteutuu.

(ii) Oletetaan seuraavaksi, että toinen ehto toteutuu. Jos kolmas ehto ei toteudu, on olemassa sellainen luku t , että $1 \leq t < n/2$ ja $\deg(v_t) \leq t$. Osoitamme ensiksi, että tällöin solmujen v_1, v_2, \dots, v_t indusoima aligraafi on täydellinen. Jos tämä aligraafi ei ole täydellinen, on olemassa sellainen solmu v_l , että $l < t$ ja $\{v_l, v_t\} \notin E$. Koska $l < t$, niin

$$\deg(v_l) + \deg(v_t) < \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n.$$

Koska $\{v_l, v_t\} \notin E$, tämä on ristiriidassa toisen ehdon kanssa, joten solmujen v_1, v_2, \dots, v_t indusoima aligraafi on täydellinen.

Koska solmujen v_1, v_2, \dots, v_t aste on korkeintaan t ja solmujen v_1, v_2, \dots, v_t indusoima aligraafi on täydellinen, kullakin näistä solmuista on korkeintaan yksi vierussolmu joukossa $v_{t+1}, v_{t+2}, \dots, v_n$. Koska toisaalta $t < \frac{n}{2}$, jokin solmuista $v_{t+1}, v_{t+2}, \dots, v_n$ ei ole minkään solmun v_1, v_2, \dots, v_t vierussolmu. Olkoon v_k jokin tällainen solmu. Siis $\deg(v_k) < n - t$ ja edelleen

$$\deg(v_k) + \deg(v_t) < n - t + t = n.$$

Koska v_k ja v_t eivät ole vierussolmuja, tämä on ristiriidassa toisen ehdon kanssa. Siis myös kolmas ehto toteutuu.

(iii) Oletetaan seuraavaksi, että kolmas ehto on voimassa. Jos neljäs ehto ei ole voimassa, on olemassa sellaiset luvut j ja k , että $j < k$, $\deg(v_j) \leq j$ ja $\deg(v_k) \leq k - 1$, mutta $\deg(v_j) + \deg(v_k) < n$. Olkoon nyt $t = \deg(v_j)$. Tällöin $t < n/2$ ja edelleen

$$\deg(v_t) = \deg(v_{\deg(v_j)}) \leq \deg(v_j) = t.$$

Siis $t < n/2$ ja $\deg(v_t) \leq t$, mikä on ristiriidassa kolmannen ehdon kanssa. Siis myös neljäs ehto toteutuu.

(iv) Oletetaan lopuksi, että neljäs ehto on voimassa. Jos ehto (4.1) ei toteudu, on olemassa sellainen solmu v_t , että $\deg(v_t) \leq t < n/2$ ja $\deg(v_{n-t}) \leq n - t - 1$. Mutta silloin siis $t < n - t$, $\deg(t) \leq t$, $\deg(v_{n-t}) \leq (n - t) - 1$ ja

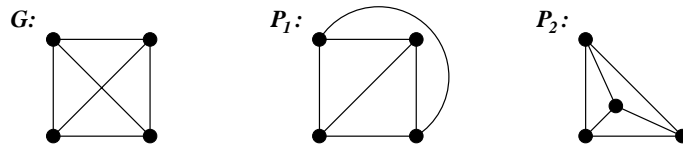
$$\deg(v_t) + \deg(v_{n-t}) \leq t + n - t - 1 = n - 1,$$

mikä on ristiriidassa neljännen ehdon kanssa. Siis G on Hamiltonin graafi. □

4.3 Tasograafi

Graafeja piirrettäessä tavoitteena on tietenkin esityksen selkeys. Yksi selkeyttä haittaava piirre on, että särmät leikkaavat toisiaan. Näin ollen graafin esittämisen kannalta on eduksi, jos graafi voidaan piirtää niin, että mitkään graafin särmät eivät leikkaa toisiaan.

Määritelmä 4.3. *Tasograafi (planar graph)* on graafi, joka voidaan piirtää tasoon niin, että mitkään graafin särmät eivät leikkaa toisiaan (särmien yhteistä päätesolmua ei pidetä leikkauspisteenä). Esitystä, jossa tasograafi piirretään niin, että särmät eivät leikkaa, sanotaan graafin *tasoesitykseksi (planar embedding)*.



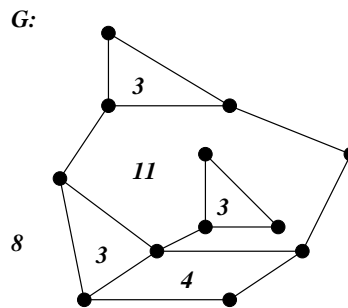
Kuva 4.7. Graafi G ja graafin G tasoesitykset P_1 ja P_2 .

Yleisesti on melko hankalaa tutkia, onko annettu graafi tasograafi.

Lause 4.7. Jokaisella yksinkertaisella tasograafilla on tasoesitys, jossa kaikki särmet voidaan piirtää suorina viivoina.

Todistus. Sivuutetaan, ks. esimerkiksi Fary [6]. □

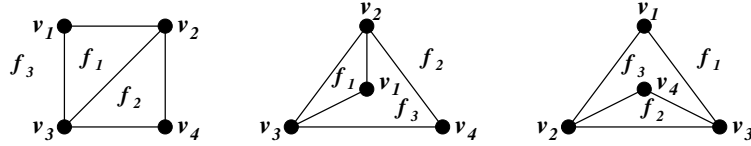
Määritelmä 4.4. Tasograafin tasoesitys jakaa tason alueisiin (*region*). Aluetta reunustavien särmien lukumäärä on alueen *aste* ($\text{deg}(\cdot)$) (sillat lasketaan mukaan kahteen kertaan).



Kuva 4.8. Graafi G ja graafin G alueiden asteet.

Tasograafin alueista yksi on ääretön, muut äärellisiä. Stereograafisen projektion avulla voidaan osoittaa, että graafi on esitettävissä tasossa täsmälleen silloin, kun se on esitettävissä pallon pinnalla. Pallon pinnalla kaikki alueet ovat äärellisiä. Koska projektiossa napa voidaan valita vapaasti, tasograafi voidaan aina esittää tasossa siten, että mikä tahansa etukäteen valittu alue on ääretön (ks. esimerkiksi kuva 4.9).

Määritelmä 4.5. Tasograafin äärellisiä alueita reunustavia silmukoita sanotaan graafin *silmiksi* (*mesh*).



Kuva 4.9. Graafin kolme eri tasoesitystä. Kussakin esityksessä eri alue on ääretön.

Voidaan osoittaa (ks. esimerkiksi Thulasiraman & Swamy [17], s. 183–184), että tasograafin silmät muodostavat graafin silmukka-avaruuden kannan. Siis jos yhtenäisessä tasograafissa G on n solmua, m särmää ja r aluetta, silmukka-avaruus on $(r - 1)$ -dimensioinen. Toisaalta seurauksen 3.30 nojalla silmukka-avaruus on $\mu(G)$ -dimensioinen (eli $(m - n + 1)$ -dimensioinen). Tästä saadaan suoraan lauseen 4.8 Eulerin kaava, joka toki voidaan todistaa myös suoraan induktiolla. (Totea.)

Lause 4.8 (Eulerin kaava). *Jos yhtenäisessä tasograafissa on n solmua, m särmää ja r aluetta, niin*

$$n - m + r = 2.$$

Eulerin kaavan avulla voidaan joissakin tapauksissa todistaa ylärajoja tasograafin särmien lukumäärälle, kun solmujen lukumäärä tiedetään. Näitä tuloksia voidaan käyttää esimerkiksi sen osoittamiseen, että jokin tietty graafi ei ole tasograafi.

Lause 4.9. *Jos yhtenäisessä yksinkertaisessa tasograafissa on n solmua ($n \geq 3$) ja m särmää, niin*

$$m \leq 3n - 6.$$

Todistus. Olkoon $F = \{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ graafin alueiden joukko. Koska jokainen särmä on kahden alueen välissä, niin

$$\sum_{i=1}^r \deg(f_i) = 2m.$$

Toisaalta jokaisen alueen rajoina on vähintään kolme särmää, joten

$$2m = \sum_{i=1}^r \deg(f_i) \geq 3r.$$

Eulerin kaavan avulla saadaan tällöin

$$3n - 6 = 3(2 - r + m) - 6 = 3m - 3r \geq 3m - 2m = m.$$

□

Lause 4.10. *Jos yhtenäisessä yksinkertaisessa tasograafissa on n solmua ($n \geq 3$) ja m särmää ja graafissa ei ole kolmen särmän pituisia silmukoita, niin*

$$m \leq 2n - 4.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 4.11. *Graafit K_5 ja $K_{3,3}$ eivät ole tasograafeja.*

Todistus. Graafissa K_5 on kymmenen särmää ja viisi solmua. Koska

$$3 \cdot 5 - 6 = 9 < 10,$$

niin lauseen 4.9 mukaan K_5 ei voi olla tasograafi. Graafin $K_{3,3}$ osalta todistus jätetään harjoitustehtäväksi. □

Useat graafit, jotka eivät ole tasograafeja, voidaan piirtää toruksen ("donitsi") pinnalle. Tällaisia graafeja ovat esimerkiksi K_5 ja $K_{3,3}$.

Lause 4.12. *Yksinkertaisessa tasograafissa on ainakin yksi solmu, jonka aste on korkeintaan 5.*

Todistus. Jos kaikkien graafin $G = (V, E)$ ($|V| = n$) solmujen asteluku on vähintään 6, graafissa G on

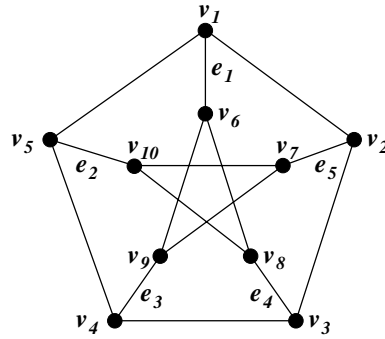
$$\frac{1}{2} \sum_{v \in V} \deg(v) \geq \frac{6n}{2} = 3n$$

särmää, mikä on ristiriidassa lauseen 4.9 kanssa. □

Lauseen 4.12 perusteella täydellinen graafi K_n ei ole tasograafi, kun $n \geq 6$, täydellinen kaksijakoinen graafi $K_{m,n}$ ei ole tasograafi, kun $m, n \geq 6$, ja Hararyn graafi $H_{k,n}$ ei ole tasograafi, kun $k \geq 6$.

Lause 4.13. *Graafi on tasograafi täsmälleen silloin, kun sillä ei ole aligraafia, joka olisi kutistettavissa graafiksi K_5 tai $K_{3,3}$.*

Todistus. Sivuutetaan, ks. esimerkiksi Harary & Tutte [10]. □



Kuva 4.10. Petersenin graafi.

Esimerkki 4.4. Lauseen 4.13 perusteella kaikki täydellisen graafin K_5 aidot ali-graafit ovat tasograafeja.

Esimerkki 4.5. Kuvan 4.10 Petersenin graafi ei ole tasograafi, sillä kutistamalla e_1, e_2, e_3, e_4 ja e_5 saadaan K_5 .

Määritelmä 4.6. Jos graafin jonkin solmun asteluku on 2, solmuun tulevien särmien sanotaan olevan *sarjassa* (*series*). Olkoot $e_1 = \{u, v\}$ ja $e_2 = \{v, w\}$ sarjassa. Tällöin solmun v poistoa ja särmien e_1 ja e_2 korvaamista yhdellä särmällä $\{u, w\}$ sanotaan *sarjan lyhentämiseksi* (*series merger*). Jos taas särmään $\{u, w\}$ lisätään uusi solmu v , jolloin särmä $\{u, w\}$ korvataan särmillä $\{u, v\}$ ja $\{v, w\}$, puhutaan *sarjan pidentämisestä* (*series insertion*).

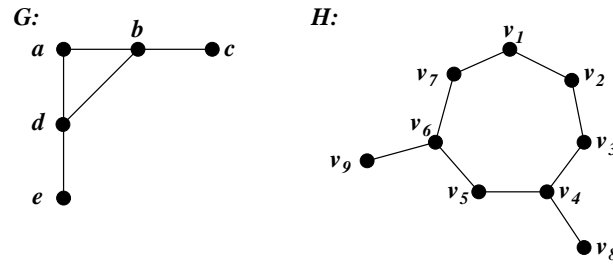
Määritelmä 4.7. Kaksi graafia ovat *homeomorfsia* (*homeomorphic*), jos ne ovat isomorfsia tai ne voidaan tehdä isomorfsiksi peräkkäisillä sarjan lyhentämisillä ja pidentämisillä.

Esimerkki 4.6. Kuvan 4.11 graafit G ja H ovat homeomorfsiset, sillä lyhentämällä graafista H pois ensin v_5 ja sitten v_1, v_2 ja v_3 saadaan graafi, joka on isomorfinen graafin G kanssa.

Lause 4.14 (Kuratowskin lause). *Graafi on tasograafi täsmälleen silloin, kun sillä ei ole aligraafia, joka olisi homeomorfinen graafin K_5 tai $K_{3,3}$ kanssa.*

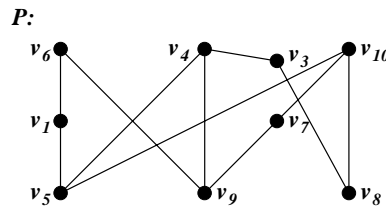
Todistus. Sivutetaan, ks. Harary [11], s. 109–112.

□



Kuva 4.11. Homeomorfitiset graafit G ja H .

Esimerkki 4.7. Poistamalla kuvan 4.10 Petersenin graafista solmu v_2 saadaan kuvan 4.12 graafi P , joka on Petersenin graafin aligraafi. Kun tästä graafista lyhennetään pois solmut v_1 , v_3 ja v_7 , saadaan graafi, joka on isomorfinen graafin $K_{3,3}$ kanssa. Siis P on homeomorfinen graafin $K_{3,3}$ kanssa, joten P (ja siis myös Petersenin graafi) ei ole tasograafi.



Kuva 4.12. Petersenin graafin aligraafi P .

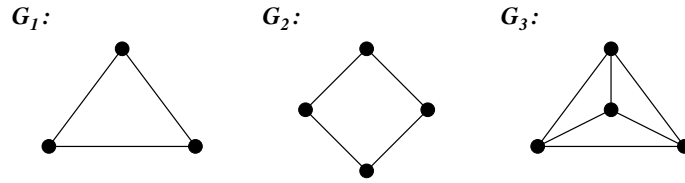
4.4 Graafin värittäminen

Graafin väritysongelmaan törmätään useissa eri yhteyksissä. Ehkä klassisin väritysongelma on kartan eri alueiden (esimerkiksi valtioiden) värittäminen eri väreillä niin, että vierekkäiset alueet ovat aina eri väriset.

Määritelmä 4.8. Graafin *värittämisellä* (*coloring*) tarkoitetaan värien liittämistä graafin solmuihin niin, että vierussolmut ovat aina eriväriset (solmua ei tällöin pidetä itsensä vierussolmuna).

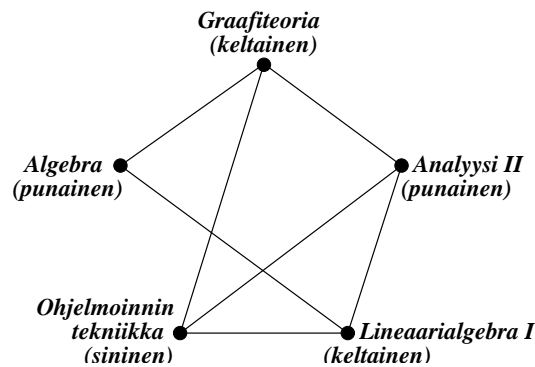
Määritelmä 4.9. Graafin G *väri*luku (*chromatic number*) $\chi(G)$ on pienin määrä värejä, joka tarvitaan graafin värittämiseen.

Esimerkki 4.8. Kuvan 4.13 graafin väriluvut ovat $\chi(G_1) = 3$, $\chi(G_2) = 2$ ja $\chi(G_3) = 4$.



Kuva 4.13. Graafit G_1 , G_2 ja G_3 .

Esimerkki 4.9. Graafin värittämistä voidaan käyttää esimerkiksi tenttipäivien valitsemiseen niin, että kukaan ei joudu kahteen tenttiin samana päivänä. Olkoot kurssit graafin solmuja ja tulkitaan särmien tarkoittavan, että kurssilla on yhteisiä opiskelijoita. Koska kuvan 4.14 graafin väriluku on kolme, tiedämme, että kolme tenttipäivää riittää siihen, että kukaan ei joudu kahteen tenttiin samana päivänä.



Kuva 4.14. Joitakin kursseja yhdistävä graafi.

Lause 4.15. Jos G on yksinkertainen graafi, niin $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Todistus. Väritetään solmut yksitellen. Jos käytettävissä on $\Delta(G) + 1$ väriä ja jokaisella solmulla on korkeintaan $\Delta(G)$ vierussolmua, jokaiselle solmulle on aina vapaana jokin sellainen väri, jota ei ole käytetty sen vierussolmuille. Näin ollen $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

□

Esimerkki 4.10. Täydellisen graafin K_n värittämiseen tarvitaan $\Delta(K_n) + 1 = n$ väriä, sillä kukin solmu on jokaisen muun solmun vierussolmu.

Esimerkki 4.11. Parittomanpituisten silmukan C_{2k+1} ($k \in \mathbb{Z}_+$) värittämiseen tarvitaan $\Delta(C_{2n+1}) + 1 = 3$ väriä. Sen sijaan parillisenpituisten silmukan C_{2k} värittämiseen riittää kaksi väriä.

Lause 4.16. *Olkoon G yhtenäinen yksinkertainen graafi. Jos G ei ole parittoman pituinen silmukka tai täydellinen graafi, niin*

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Todistus. Sivuutetaan. Ks. esimerkiksi Thulasiraman & Swamy [17], s. 252–253.

□

Lause 4.17 (Neliväri-lause). *Kunkin tasograafin väriluku on korkeintaan neljä.*

Todistus. Sivuutetaan (konjektuuri 1850-luvulla, todistettu 1976, ks. esimerkiksi Appel & Haken [1]).

□

Muiden kuin tasograafien väriluvulle ei ole ylärajaa. Esimerkiksi täydellisen graafin K_n väriluku on sama kuin graafin K_n solmujen lukumäärä n . Graafista voidaan myös värittää särmät tai alueet. Alueiden värittäminen palautuu solmujen värittämiseen muodostamalla uusi graafi, jossa alkuperäisen graafin alueet ovat uuden graafin solmuja ja alkuperäisen graafin alueiden väliset särmät ovat uuden graafin solmuja yhdistäviä särmiä. Särmien värittäminen voidaan palauttaa solmujen värittämiseen vastaavan tapaisella menettelyllä. (Totea.)

Luku 5

Juurelliset puut

Määritelmän 3.1 mukaan puu on suuntaamaton silmukaton graafi, jonka mikään solmu ei ole toista erikoisempi. Juurellinen puu puolestaan on suunnattu graafi, jossa solmuja on kahdenlaisia: haaraumasolmuja ja lehtiä. Solmuista yksi on puun juuri. Juurellinen puu vastaa siis paremmin intuitiivista näkemystä siitä, mikä puu on. Juurellisia puita ovat esimerkiksi malleina käytetyt etsintä- ja päätöspuut, tietokoneiden hakemistopuut, hierarkisten organisaatioiden organisaatiomallit tai vaikkapa sukupuut, joista osa käytettävästä terminologiasta on peräisin.

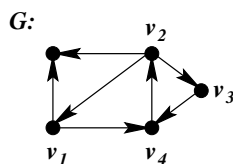
5.1 Juurellinen puu

Aluksi esitämme muutamia juurellisten puiden perusmääritelmiä ja -tuloksia.

Määritelmä 5.1. Suunnatun graafin G solmu v on graafin G *juuri* (*root*), jos solmusta v on suunnattu polku jokaiseen muuhun graafin solmuun.

Graafilla voi olla useita juuria. Esimerkiksi kuvan 5.1 graafilla on neljä juurta.

Lause 5.1. *Suunnatulla graafilla on juuri täsmälleen silloin, kun se on kvasivahvasti yhtenäinen.*

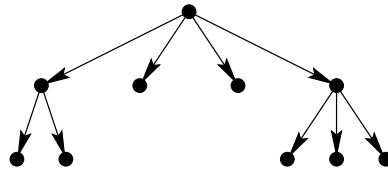


Kuva 5.1. Solmut v_1 , v_2 , v_3 ja v_4 ovat graafin G juuria.

Todistus. Olkoon $G = (V, E)$ suunnattu graafi. Oletetaan ensiksi, että graafi G on kvasivahvasti yhtenäinen. Merkitään $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Koska G on kvasivahvasti yhtenäinen, on olemassa joukon V solmu u_1 , joka on polkujen $u_1 \rightarrow v_1$ ja $u_1 \rightarrow v_2$ alkusolmu. Edelleen on olemassa joukon V solmu u_2 , joka on polkujen $u_2 \rightarrow u_1$ ja $u_2 \rightarrow v_3$ alkusolmu. Siis solmusta u_2 alkavat ainakin polut $u_2 \rightarrow v_i$ ($i = 1, 2, 3$). Jatkamalla vastaavasti saadaan solmut u_3, u_4, \dots, u_{n-1} ja polut $u_k \rightarrow v_i$ ($k = 3, 4, \dots, n-1, i = 1, 2, \dots, k+1$). Siis solmu u_{n-1} on graafin G juuri.

Oletetaan toiseksi, että suunnatulla graafilla $G = (V, E)$ on juuri r . Olkoot solmut u ja v joukon V solmuja. Koska solmu r on juuri, graafissa G on polku $r \rightarrow u$ ja polku $r \rightarrow v$. Siis G on kvasivahvasti yhtenäinen. □

Määritelmä 5.2. Suunnattu graafi G on *juurellinen puu* (*directed tree, rooted tree, arborescence*), jos graafissa G on juuri ja vastaava suuntaamaton graafi on puu. Jos graafin G solmun lähtöaste on nolla, solmua v sanotaan *lehdeksi* (*leaf*). Muussa tapauksessa solmu on *sisäsolmu* eli *haaraumasolmu* (*intermediate vertex, internal vertex*).



Kuva 5.2. Juurellinen puu.

Kuvassa 5.2 on esimerkki juurellisestä puusta. Kuvassa juuri on piirretty ylimmäksi.

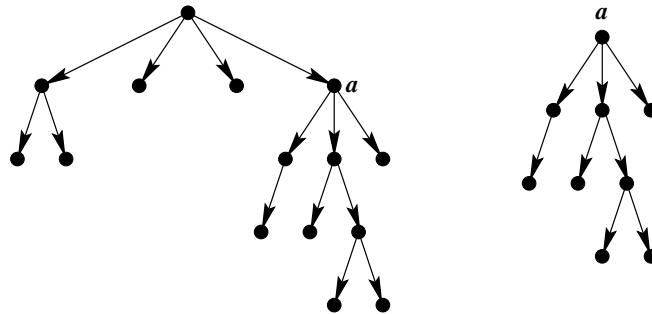
Jatkossa tässä luvussa puulla tarkoitetaan juurellista puuta, ellei toisin mainita. Vastaavasti myös kuvioissa jätetään usein särmien suunnat merkittömäksi, jos ne ovat asiayhteyden perusteella selvät.

Määritelmä 5.3. Olkoon $G = (V, E)$ juurellinen puu. Jos $(u, v) \in E$, sanotaan, että u on solmun v *vanhempi* (*parent*) ja v vastaavasti solmun u *lapsi* (*child*). Jos myös w on solmun u lapsi, solmut v ja w ovat *sisaruksia* (*siblings*). Solmun u *esivanhemmat* (*ancestors*) ovat ne solmut, joista on polku solmuun u (eli vanhempi, vanhemman vanhempi, jne.). Vastaavasti solmun u *jälkeläiset* (*descendants*) ovat ne solmut, joihin solmusta u on polku (eli lapset, lastenlapset, jne.).

Vanhemmassa kirjallisuudessa puhutaan vanhempien ja lasten sijasta *isistä* (*father*) ja *pojista* (*son*).

Määritelmä 5.4. Olkoon a jokin juurellisen puun solmu. Silloin solmun a määräämä *alipuu* (*subtree*) on puu, jonka juurena on a ja joka koostuu solmusta a , solmun a jälkeläisistä sekä vastaavista särmistä.

Koska jokainen puun solmu määrää yhden puun alipuun, puulla on yhtä monta alipuuta kuin siinä on solmuja. Kaikki puun aligraafit, jotka ovat puita, eivät siis ole puun alipuita. Kuvassa 5.3 on esimerkki puusta ja puun alipuusta.



Kuva 5.3. Puu ja solmun a määräämä alipuu.

Lause 5.2. Olkoon G suunnattu graafi, jossa on ainakin kaksi solmua. Silloin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä:

1. Graafi G on juurellinen puu.
2. Graafissa G on solmu, josta on täsmälleen yksi polku graafin jokaiseen solmuun.
3. Graafi G on kvasivahvasti yhtenäinen ja poistamalla siitä mikä tahansa särmä saadaan graafi, joka ei ole kvasivahvasti yhtenäinen.
4. Graafi G on kvasivahvasti yhtenäinen ja siinä on sellainen solmu r , että

$$\deg^-(r) = 0$$

ja

$$\deg^-(v) = 1, \text{ kun } v \neq r.$$

5. Graafia G vastaava suuntaamaton graafi on silmukaton ja graafissa G on sellainen solmu r , että

$$\deg^-(r) = 0$$

ja

$$\deg^-(v) = 1, \text{ kun } v \neq r.$$

6. Graafi G on kvasivahvasti yhtenäinen ja sitä vastaava suuntaamaton graafi on silmukaton.

Todistus. Olkoon $G = (V, E)$ suunnattu graafi, jossa on n solmua ($n \geq 2$). Todistamme lauseen osoittamalla, että edellisestä väitteestä seuraa aina seuraava väite ja että vihdoin viimeisestä väitteestä seuraa ensimmäinen väite.

(i) Oletetaan ensiksi, että G on juurellinen puu. Silloin juuresta r on polku jokaiseen graafin G solmuun. Koska graafia G vastaava suuntaamaton graafi on puu, näitä polkuja kuhunkin solmuun on lauseen 3.4 kohdan 2 mukaan täsmälleen yksi.

(ii) Oletetaan seuraavaksi, että graafissa G on solmu r , josta on täsmälleen yksi polku graafin G jokaiseen solmuun. Olkoot u ja v joukon V solmuja. Siis solmusta r on polku sekä solmuun u että solmuun v . Siis G on kvasivahvasti yhtenäinen.

Olkoon nyt r edelleen solmu, josta on polku graafin jokaiseen solmuun ja olkoon $e = (u, v)$ joukon E särmä. Jos $G - e$ on kvasivahvasti yhtenäinen, on olemassa joukon V solmu w , josta alkavat graafin $G - e$ polut $w \rightarrow u$ ja $w \rightarrow v$. Siis graafissa G on kaksi eri polkua $w \rightarrow v$. Koska graafissa G on myös polku $r \rightarrow w$, graafissa G on kaksi eri polkua $r \rightarrow v$, mikä on mahdotonta. Siis $G - e$ ei ole kvasivahvasti yhtenäinen.

(iii) Oletetaan seuraavaksi, että G on kvasivahvasti yhtenäinen ja että poistamalla siitä mikä tahansa särmä saadaan graafi, joka ei ole kvasivahvasti yhtenäinen. Koska G on kvasivahvasti yhtenäinen, siinä on lauseen 5.1 mukaan juuri r . Todistetaan ensiksi, että $\deg^-(r) = 0$. Tehdään vastaoletus, että $\deg^-(r) > 0$. Siis graafissa G on särmä (u, r) , missä $u \in V$. Näin ollen graafissa $G - (u, r)$ on juuri r eli $G - (u, r)$ on kvasivahvasti yhtenäinen, mikä on mahdotonta. Siis $\deg^-(r) = 0$.

Oletetaan nyt, että $v \in V$ ja $v \neq r$, ja osoitetaan, että $\deg^-(v) = 1$. Koska solmusta r on polku solmuun v , niin $\deg^-(v) \geq 1$. Jos $\deg^-(v) > 1$, graafissa G on olemassa särmät (u, v) ja (w, v) , missä $u, w \in V$. Toisaalta juuresta r on olemassa suora polku solmuihin v, u ja w . Suora polku p juuresta r solmuun v joko kulkee tai ei kulje särmän (u, v) kautta. Jos p kulkee särmän (u, v) kautta, niin r on myös graafin $G - (w, v)$ juuri, ja jos p ei kulje särmän (u, v) kautta, niin r on myös graafin $G - (u, v)$ juuri. Siis kummassakin tapauksessa graafi säilyy

juurellisena ja siis kvasivahvasti yhtenäisenä, vaikka yksi särmä poistetaan. Tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Siis $\deg^-(v) = 1$.

(iv) Oletetaan seuraavaksi, että G on kvasivahvasti yhtenäinen ja että siinä on sellainen solmu r , että $\deg^-(r) = 0$ ja $\deg^-(v) = 1$, kun $v \neq r$. Oletuksen perusteella siis

$$|E| = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = n - 1.$$

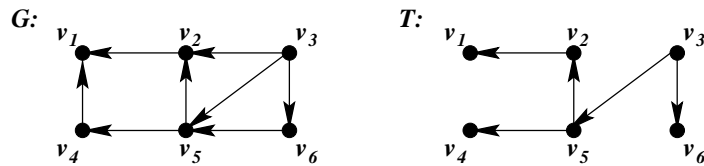
Koska graafi G on kvasivahvasti yhtenäinen, graafia G vastaava suuntaamaton graafi on yhtenäinen. Siis lauseen 3.4 kohtien 3 ja 4 mukaan graafia G vastaava suuntaamaton graafi on silmukaton.

(v) Oletetaan seuraavaksi, että graafia G vastaava suuntaamaton graafi on silmukaton ja graafissa G on sellainen solmu r , että $\deg^-(r) = 0$ ja $\deg^-(v) = 1$, kun $v \neq r$. Koska $|E| = n - 1$ (ks. kohta (iv)) ja graafia G vastaava suuntaamaton graafi on silmukaton, graafia G vastaava suuntaamaton graafi on lauseen 3.4 kohtien 3 ja 4 nojalla yhtenäinen. Olkoon $v \in V$. Koska graafia G vastaava suuntaamaton graafi on yhtenäinen, on olemassa suuntaamaton polku $r \rightarrow v$. Jos nyt ei ole olemassa suunnattua polkua $r \rightarrow v$, niin joko $\deg^-(r) \geq 1$ tai polun $r \rightarrow v$ jonkin muun solmun tuloaste on vähintään 2. Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista, joten on olemassa suunnattu polku $r \rightarrow v$. Siis solmu r on graafin G juuri, joten lauseen 5.1 perusteella graafi G on kvasivahvasti yhtenäinen.

(vi) Oletetaan lopuksi, että G on kvasivahvasti yhtenäinen ja että sitä vastaava suuntaamaton graafi on silmukaton. Koska graafia G vastaava suuntaamaton graafi on silmukaton ja yhtenäinen, graafi G on puu. Koska G on lisäksi kvasivahvasti yhtenäinen, graafissa G on juuri. Siis G on juurellinen puu.

□

Määritelmä 5.5. Heikosti yhtenäisen graafin G aligraafi T on graafin G *virittävä juurellinen puu* (*directed spanning tree*), jos T on juurellinen puu ja siinä on kaikki graafin G solmut.



Kuva 5.4. Suunnattu graafi G ja sen virittävä juurellinen puu T .

Lause 5.3. *Suunnatulla graafilla G on virittävä juurellinen puu täsmälleen silloin, kun G on kvasivahvasti yhtenäinen.*

Todistus. Olkoon G suunnattu graafi. Jos graafilla G on virittävä juurellinen puu T , puun T juuri on myös graafin G juuri. Tällöin graafi G on kvasivahvasti yhtenäinen.

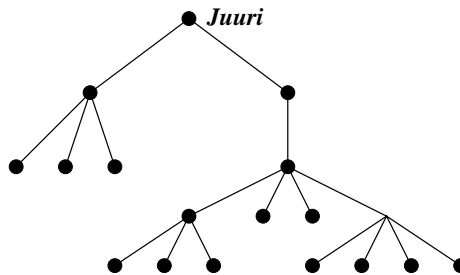
Jos graafi G on kvasivahvasti yhtenäinen, mutta ei ole (virittävä) juurellinen puu, graafissa G on lauseen 5.2 kohdan 3 perusteella särmiä, joiden poistamisen jälkeen jäljelle jäänyt graafi on edelleen kvasivahvasti yhtenäinen. Kun kaikki tällaiset särmit poistetaan graafista G , saadaan jäljelle jääneestä graafista graafin G virittävä juurellinen puu.

□

5.2 Binääripuut ja muut m -puut

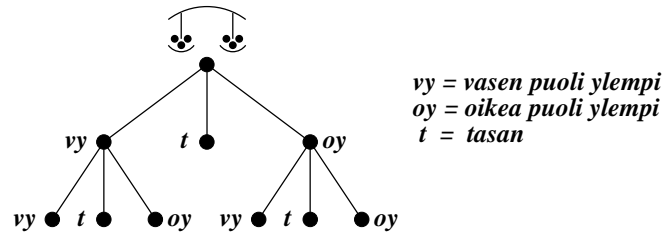
Seuraavaksi tarkastalemmepuita, joissa yksittäisten solmujen lasten lukumäärälle on annettu yläraja.

Määritelmä 5.6. Juurellista puuta sanotaan m -puuksi, jos puun jokaisella sisäsolmulla on korkeintaan m lasta. Puu on *kokonainen* eli *täydellinen (full) m -puu*, jos sen jokaisella sisäsolmulla on täsmälleen m lasta. Erityisesti 2-puuta sanotaan *binääripuuksi (binary tree)*.



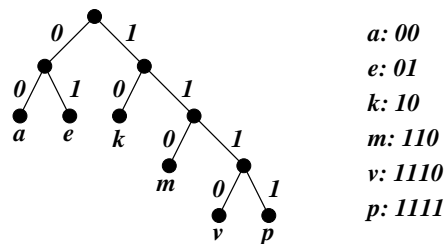
Kuva 5.5. Juurellinen 4-puu.

Esimerkki 5.1. Klassinen ongelma on hakea kultalanteista yksi muita keveämpi lantti (väärä raha) mahdollisimman pienellä määrällä punnituksia orsivaa'alla. Tämä onnistuu jakamalla lanttijoukko aina kolmeen osaan ja punnitsemalla näistä kaksi. Jos punnitus menee tasan, väärä raha on kolmannessa joukossa, muulloin punnitavista kevyemmässä joukossa. Tätä toistamalla kevein lantti löytyy. Etsintää voidaan mallintaa 3-puulla (ks. kuva 5.6).



Kuva 5.6. Päättöpuu, jolla haetaan seitsemästä lantista yksi muita kevyempi lantti.

Esimerkki 5.2. Informaatioteoriassa *prefix-koodi* (*prefix code*) on vaihtuvanpituisen koodi, jossa mikään koodisana ei ole toisen koodisanan alkuosa. Näin useammin esiintyville merkeille voidaan antaa lyhyempi koodi kuin harvemmin esiintyville merkeille. Kuitenkin koodi voidaan purkaa yksikäsitteisesti. Prefix-koodia muodostettaessa käytetään usein apuna binääripuuta (ks. kuva 5.7).



Kuva 5.7. Prefix-koodi merkeille a, e, k, m, v ja p sekä koodia vastaava binääripuu.

Lause 5.4. Täydellisessä m -puussa, jossa on i sisäsolmua, on $mi + 1$ solmua.

Todistus. Kullakin sisäsolmulla on m lasta, joten sisäsolmujen lapsia on yhteensä mi kappaletta. Sisäsolmujen lasten lisäksi puussa on juuri eli solmuja on yhteensä $mi + 1$.

□

Lause 5.5. Olkoon T täydellinen m -puu. Tällöin seuraavat väitteet ovat voimassa.

1. Jos puussa T on n solmua, siinä on $(n-1)/m$ sisäsolmua ja $((m-1)n+1)/m$ lehteä.
2. Jos puussa T on i sisäsolmua, siinä on $mi + 1$ solmua ja $(m-1)i + 1$ lehteä.

3. Jos puussa T on l lehteä, siinä on $(ml-1)/(m-1)$ solmua ja $(l-1)/(m-1)$ sisäsolmua.

Todistus. Olkoon T täydellinen m -puu, jossa on n solmua, i sisäsolmua ja l lehteä. Silloin

$$n = l + i. \tag{5.1}$$

Lisäksi lauseen 5.4 mukaan

$$n = mi + 1. \tag{5.2}$$

Todistamme nyt kaikki kolme kohtaa erikseen.

(i) Sisäsolmujen lukumäärä saadaan ratkaisemalla i yhtälöstä (5.2), jolloin $i = (n - 1)/m$. Sijoittamalla tämä yhtälöön (5.1) ja ratkaisemalla l yhtälöstä (5.1) saadaan lehtien lukumäärä

$$l = n - (n - 1)/m = ((m - 1)n + 1)/m.$$

(ii) Solmujen lukumäärä saadaan suoraan yhtälöstä (5.2). Lehtien lukumäärä saadaan sijoittamalla solmujen lukumäärä yhtälöön (5.1). Siis

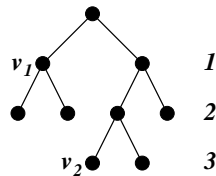
$$l = mi + 1 - i = (m - 1)i + 1. \tag{5.3}$$

(iii) Ratkaisemalla i yhtälöstä (5.3) saadaan edelleen sisäsolmujen lukumäärä $i = (l - 1)/(m - 1)$. Solmujen lukumäärä saadaan puolestaan sijoittamalla tämä yhtälöön (5.1), jolloin

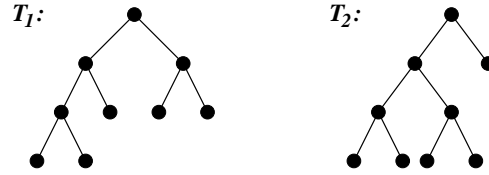
$$n = l + (l - 1)/(m - 1) = (ml - 1)/(m - 1).$$

□

Määritelmä 5.7. Solmun *taso* (*level*) on solmun esivanhempien lukumäärä. Puun *korkeus* (*height*) on solmujen tasoista suurin.



Kuva 5.8. Solmun v_1 taso on yksi ja solmun v_2 taso on kolme.



Kuva 5.9. Puu T_1 on tasapainoinen, mutta puu T_2 ei ole.

Määritelmä 5.8. Olkoon puun korkeus h . Silloin puu on *tasapainoinen* (*balanced*), jos jokainen puun lehti on joko tasolla h tai tasolla $h - 1$.

Lause 5.6. Jos m -puun korkeus on h , siinä on korkeintaan m^h lehteä.

Todistus. Todistamme lauseen induktiolla m -puun korkeuden h suhteen. Jos puun korkeus on nolla, puussa on ainoastaan juuri ja väite on tosi. Tehdään induktiooletus, että kun puun korkeus on korkeintaan h , puussa on korkeintaan m^h lehteä. Olkoon T jokin m -puu, jonka korkeus on $h + 1$. Olkoon r puun T juuri. Nyt $T - r$ muodostuu puun T alipuista, jotka ovat myös m -puita ja joita on korkeintaan m kappaletta. Lisäksi kunkin alipuun korkeus on korkeintaan h , joten induktiooletuksen perusteella kullakin alipuulla on korkeintaan m^h lehteä. Puulla T on siis korkeintaan $mm^h = m^{h+1}$ lehteä.

□

Lause 5.7. Jos m -puussa on l lehteä, puun korkeus h on vähintään $\lceil \log_m l \rceil$. Jos puu on täydellinen ja tasapainoinen, niin $h = \lceil \log_m l \rceil$.

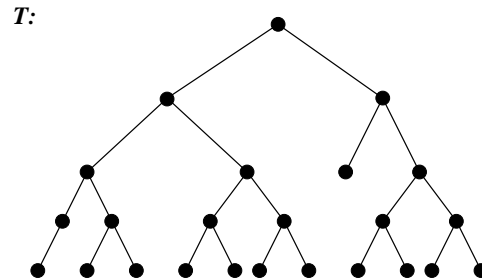
Todistus. Lauseen 5.6 mukaan $l \leq m^h$, joten $\log_m l \leq h$. Koska $h \in \mathbb{N}$, niin $\lceil \log_m l \rceil \leq h$.

Olkoon nyt T täydellinen ja tasapainoinen m -puu. Jos puun T korkeus on nolla tai yksi, niin lause on selvästi voimassa. Todistuksen yleisyyttä rajoittamatta voimme siis olettaa, että $h \geq 2$. Täydellisessä ja tasapainoisessa m -puussa on tasolla $h - 1$ yhteensä m^{h-1} solmua. Näistä kaikki eivät ole lehtiä, joten tasolla h on ainakin m lehteä. Täten puussa on ainakin $m^{h-1} - 1 + m$ lehteä, mistä seuraa, että $l \geq m^{h-1} - 1 + m > m^{h-1}$. Siis $\log_m l > h - 1$ ja edelleen $h - 1 < \lceil \log_m l \rceil \leq h$. Koska $\lceil \log_m l \rceil$ on kokonaisluku, niin $\lceil \log_m l \rceil = h$.

□

Täydellisyys ja tasapainoisuus eivät ole välttämättömiä ehtoja yhtäsuuruudelle lauseessa 5.7. Esimerkiksi kuvan 5.10 binääripuussa T on 12 lehteä ja puun

korkeus h on 4. Siis $h = \lceil \log_2 12 \rceil$, vaikka puu ei ole täydellinen eikä tasapainoinen. Kuvassa 5.9 taas on kaksi täydellistä binääripuuta, joissa molemmissa on yhtä monta lehteä ja jotka molemmat ovat samankorkuisia. Siis molemmissa on lauseen 5.7 yhtäsuuruus samanaikaisesti voimassa. Kuitenkin vain toinen niistä on tasapainoinen.



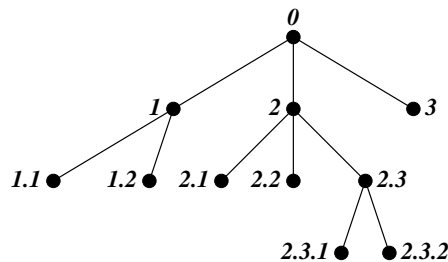
Kuva 5.10. Binääripuu, joka ei ole täydellinen eikä tasapainoinen.

5.3 Juurellisen puun läpikäynti

Määritelmä 5.9. Juurellinen puu on *järjestetty (ordered) puu*, jos jokaisen solmun lapset on järjestetty. Järjestetyt puut piirretään niin, että lasten järjestys on vasemmalta oikealle. Jos lapsia on kaksi, ensimmäinen lapsi on *vasen lapsi (left child)* ja toinen lapsi on *oikea lapsi (right child)*. Vastaavia alipuita kutsutaan *vasemmaksi* ja *oikeaksi alipuuksi*.

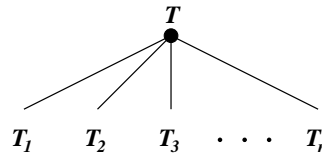
Järjestetyn puun solmut voidaan indeksoida seuraavasti (vrt. kuva 5.11).

1. Juuren indeksi on 0 ja juuren lasten $1, 2, \dots, k$ (vasemmalta oikealle).
2. Jos solmun v indeksi on A , solmun v lasten indeksit ovat $A.1, A.2, \dots, A.k_A$ (vasemmalta oikealle).



Kuva 5.11. Järjestetty puu.

Oletetaan, että juurellinen puu on järjestetty, että sitä käytetään tiedon varastointiin ja ettei sen solmuihin voi viitata suoraan. Solmut on siis käytävä läpi jossakin järjestyksessä. Tässä tarkastellaan teoreettisella tasolla kolmea eri läpikäyntijärjestystä. Oletamme jatkossa, että läpikäytävä puu on kuvan 5.12 muotoa, missä siis T_1, T_2, \dots, T_n ovat alipuita.



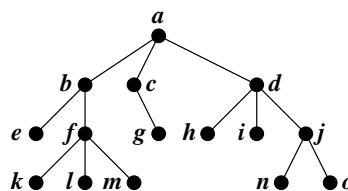
Kuva 5.12. Järjestetty puu T . Puulla T on n sellaista alipuuta, joiden juuret ovat puun T juuren lapsia.

Algoritmi 5.1 (Esijärjestys (preorder)). Puun kaikki solmut käydään läpi seuraavasti. Ensin käsitellään juuri, sitten T_1 esijärjestyksessä, sitten T_2 esijärjestyksessä ja niin edelleen. Viimeisenä käsitellään siis T_n esijärjestyksessä.

Algoritmi 5.2 (Sisäjärjestys (inorder)). Puun kaikki solmut käydään läpi seuraavasti. Ensin käsitellään T_1 sisäjärjestyksessä, sitten käsitellään juuri, sitten käsitellään T_2 sisäjärjestyksessä, T_3 sisäjärjestyksessä ja niin edelleen, kunnes viimeisenä käsitellään T_n sisäjärjestyksessä.

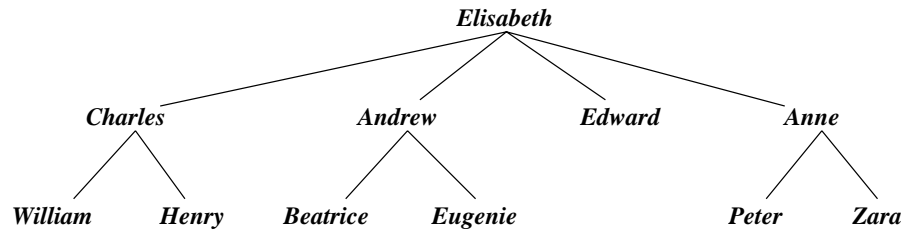
Algoritmi 5.3 (Jälkijärjestys (postorder)). Puun kaikki solmut käydään läpi seuraavasti. Ensin käsitellään T_1 jälkijärjestyksessä, sitten T_2 jälkijärjestyksessä ja niin edelleen, kunnes käsitellään T_n jälkijärjestyksessä. Lopuksi käsitellään juuri.

Esimerkki 5.3. Kuvan 5.13 puun solmut ovat esijärjestyksessä lueteltuna $abefklmcdghijno$, sisäjärjestyksessä lueteltuna $ebkflmagchdijno$ ja jälkijärjestyksessä lueteltuna $eklmfbgchinojda$.



Kuva 5.13. Järjestetty puu.

Esimerkki 5.4. Kuningassuvun sukupuun, jossa lapset ovat ikäjärjestyksessä siten, että pojat edeltävät¹ tyttäriä (ks. kuva 5.14), läpikäyminen esijärjestyksessä antaa kruununperimisjärjestyksen. Sisä- ja jälkijärjestyksellä ei sen sijaan ole mielekäästä tulkintaa.



Kuva 5.14. Englannin kuningattaren Elisabeth II:n jälkeläiset suoraan alenevassa polvessa kesäkuussa 2001.

5.4 Aritmeettisten lausekkeiden esitysmuotoja

Tarkastelemme aritmeettisten laskutoimitusten eri esitysmuotoja. Näitä esitysmuotoja voidaan myös soveltaa esimerkiksi joukko-opillisiin lausekkeisiin. Kun aritmeettinen lauseke on annettu tavanomaisessa muodossa, muodostetaan *laskutoimituspuu* seuraavasti.

1. Juureksi otetaan laskutoimitus, joka suoritetaan viimeiseksi.
2. Alipuiksi asetetaan laskutoimituksen kohteet (operandit).
3. Jatketaan prosessia alipuiksi asetetuille lausekkeille, kunnes lausekkeina ovat muuttujat ja vakiot.

Laskutoimituspuun haarautumasolmuina ovat siis laskutoimitukset, laskutoimitusten kohteina alipuut (vasemmalta oikealle) ja lehtinä muuttujat ja vakiot.

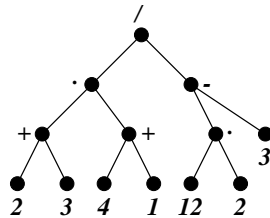
Määritelmä 5.10 (Esimerkintäinen esitysmuoto (prefix)). Esimerkintäinen esitysmuoto on laskutoimituspuun esijärjestyksen antama muoto.

¹Esimerkiksi Englannissa nainen voi nykyäänkin (kesäkuu 2001) periä kruunun vain, jos hänellä ei ole elossa olevaa veljeä eikä veljen elossa olevia rintaperillisiä. Ruotsissa lakia muutettiin tältä osin 1970–1980-lukujen vaihteessa.

Määritelmä 5.11 (Sisämerkintäinen esitysmuoto (infix)). Sisämerkintäinen esitysmuoto on laskutoimituspuun sisäjärjestyksen antama muoto täydennettynä suluilla.

Määritelmä 5.12 (Jälkimerkintäinen esitysmuoto (postfix)). Jälkimerkintäinen esitysmuoto on laskutoimituspuun jälkijärjestyksen antama muoto.

Esitysmuodoista sisämerkintäinen on siis lausekkeen tavanomainen esitysmuoto, missä operaattori on operandien välissä. Esimerkintäisessä esitysmuodossa operaattori edeltää ja jälkimerkintäisessä seuraa operandeja.



Kuva 5.15. Laskutoimituspuu.

Esimerkki 5.5. Kuvan 5.15 laskutoimituspuun sisämerkintäinen esitysmuoto on

$$((2 + 3) \cdot (4 + 1)) / ((12 \cdot 2) - 3),$$

esimerkintäinen esitysmuoto on

$$/ \cdot + 2 3 + 4 1 - \cdot 12 2 3$$

ja jälkimerkintäinen esitysmuoto on

$$2 3 + 4 1 + \cdot 12 2 \cdot 3 - /$$

Esimerkintäisen lausekkeen arvo lasketaan esimerkiksi kulkemalla oikealta vasemmalle ja soveltamalla operaattoria aina kahteen välittömästi lähinnä oikealla olevaan operandiin. Vastaavasti jälkimerkintäisen lausekkeen arvo lasketaan etenemällä vasemmalta oikealle ja kohdattaessa operaattori sovelletaan sitä kahteen edeltävään operandiin.

Esimerkki 5.6. Esimerkintäisen lausekkeen

$$/ \cdot + 2 3 + 4 1 - \cdot 12 2 3$$

arvo lasketaan seuraavasti. Ensin lasketaan $\cdot 12\ 2 = 24$, sitten $- 24\ 3 = 21$, sitten $+ 4\ 1 = 5$, sitten $+ 2\ 3 = 5$, sitten $\cdot 5\ 5 = 25$ ja lopuksi $/ 25\ 21 = 25/21$.

Jälkimerkintäisen lausekkeen

$$2\ 3 + 4\ 1 + \cdot 12\ 2 \cdot 3 - /$$

arvo taas lasketaan seuraavasti. Ensin lasketaan $2\ 3 + = 5$, sitten $4\ 1 + = 5$, sitten $5\ 5 \cdot = 25$, sitten $12\ 2 \cdot = 24$, sitten $24\ 3 - = 21$ ja lopuksi $25\ 21 / = 25/21$.

Kirjallisuutta

- [1] K. I. Appel & W. Haken, "Every Planar Map is Four-Colorable". *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 82 (1976), 711–712.
- [2] B. Bollobás, *Graph Theory. An Introductory Course*. Springer–Verlag, New York, 1979.
- [3] G. Chartrand & L. Lesniak, *Graphs & Digraphs*. 2nd Edition. Wadsworth & Brooks, Belmont, California, 1986.
- [4] W. K. Chen, "On Vector Spaces Associated with a Graph". *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 20 (1971), 526–529.
- [5] R. Diestel, *Graph Theory*. Springer–Verlag, New York, 1996.
- [6] I. Fary, "On Straight Line Representation of Planar Graphs". *Acta Sci. Math. Szeged*, vol. 11 (1948), 229–233.
- [7] J. Fraleigh, *A First Course in Abstract Algebra*. 5th Edition. Addison–Wesley, Reading, Massachusetts, 1994.
- [8] S. Friedberg, A. Insel & L. Spence, *Linear Algebra*. 2nd Edition. Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
- [9] A. Gibbons, *Algorithmic Graph Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985.
- [10] F. Harary & W. T. Tutte, "A Dual Form of Kuratowski's Theorem". *Canad. Math. Bull.*, vol. 8 (1965), 17–20.
- [11] F. Harary, *Graph Theory*. Addison–Wesley, Reading, Massachusetts, 1969.
- [12] N. Hartsfield, *Pearls in Graph Theory. A Comprehensive Introduction*. Revised and augmented edition. Academic Press, San Diego, California, 1994.

- [13] J. Merikoski, A. Virtanen & P. Koivisto, *Diskreetti matematiikka I*. 11. painos. Moniste B 42, Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos, Tampereen yliopisto, Tampere, 2001.
- [14] S. P. Radziszowski, "Small Ramsey numbers". *Electronic J. of Combinatorics*, Dynamic Survey 1, 1999. (<http://www.combinatorics.org/Surveys/>)
- [15] K. H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*. 2nd Edition. McGraw-Hill, New York, 1991.
- [16] K. Ruohonen, *Graafiteoria*. Opetusmoniste 220, Tampereen teknillinen korkeakoulu, Tampere, 2000.
- [17] K. Thulasiraman & M. N. S. Swamy, *Graphs: Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons, New York, 1992.
- [18] H. Walther, "Über die Nichtexistenz eines Knotenpunktes, durch den alle längsten Wege eines Graphen gehen". *J. Combinatorial Theory*, vol. 6 (1969), 1–6.
- [19] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
- [20] T. W. Williams & L. M. Maxwell, "The Decomposition of a Graph and the Introduction of a New Class of Subgraphs". *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 20 (1971), 385–389.
- [21] R. Wilson, *Introduction to Graph Theory*. 2nd Edition. Longman Group, London, 1979.

Hakemisto

- k*-jakoinen graafi, 11
- k*-puu, 71
- k*-särmäyhtenäinen graafi, 55
- k*-säännöllinen graafi, 10
- k*-yhtenäinen graafi, 49
- m*-puu, 102

- aito aligraafi, 13
- aligraafi, 13
 - aito, 13
 - maksimaalinen, 14
 - minimaalinen, 14
 - virittävä, 13
- alimetsä, 71
- alipuu, 60, 99
- alkioiden lukumäärä, 8
- alkusolmu, 24
- alue, 90
- aritmeettisen lausekkeen esitysmuoto
 - esimerkintäinen, 108
 - jälkimerkintäinen, 109
 - sisämerkintäinen, 109
- aste
 - alueen, 90
 - graafin, 36
 - maksimi-, 8
 - minimi-, 8
 - solmun, 7

- binäärioperaatioita
 - erotus, 17
 - leikkaus, 17
 - rengassumma, 17
 - unioni, 17

- binääripuu, 102

- digraafi, 3
- Dijkstran algoritmi, 30

- eristetty solmu, 7
- erotus, 17
- esijärjestys, 107
- esimerkintäinen esitysmuoto, 108
- esivanhemmat, 98
- Eulerin graafi, 83
- Eulerin kaava, 91
- Eulerin piiri, 83
- Eulerin polku, 83

- graafi
 - k*-jakoinen, 11
 - k*-särmäyhtenäinen, 55
 - k*-säännöllinen, 10
 - k*-yhtenäinen, 49
 - ali-, 13
 - Eulerin, 83
 - Hamiltonin, 87
 - Hararyn, 52
 - isomorfinen, 22
 - kaksijakoinen, 10
 - komplementti, 15, 16
 - multi-, 2
 - nolla-, 1
 - painotettu, 4
 - pseudo-, 3
 - separoitumaton, 38
 - separoituva, 38
 - silmukatön, 29

- suunnattu, 3
- suunnattu multi-, 4
- taso-, 89
- triviaali, 1
- täydellinen, 10
- täydellinen kaksijakoinen, 11
- Waltherin, 33
- yhtenäinen, 31
- yksinkertainen, 1, 2

- haaraumasolmu, 98
- hajotusjoukko, 49
- Hamiltonin graafi, 87
- Hamiltonin piiri, 87
- Hamiltonin polku, 87
- Hamiltonin silmukka, 87
- handshaking theorem, 8
- Hararyn graafi, 52
- heikosti yhtenäinen, 32
- homeomorfinen, 93

- indusointi, 14
 - solmu-, 14
 - särmä-, 14
- irrotus, 42
- irrotusjoukko, 42
- irrotussolmu, 37
- isomorfisuus, 22, 23

- juurellinen puu, 98
- juurellisen puun läpikäynti
 - esijärjestyksessä, 107
 - jälkijärjestyksessä, 107
 - sisäjärjestyksessä, 107
- juuri, 97
- jälkeläinen, 98
- jälkijärjestys, 107
- jälkimerkintäinen esitysmuoto, 109
- järjestetty puu, 106

- kaari, 3, 63
- kaksijakoinen graafi, 10

- klikki, 13
- kokonainen m -puu, 102
- komplementti graafin suhteen, 16
- komplementtigräafi, 15
- komponentti, 34
- Kruskalin algoritmi, 70
- Kuratowskin lause, 93
- kvasivahvasti yhtenäinen, 32

- lapsi, 98
- lehti, 98
- leikkaus, 17
- leveysuuntainen etsintä, 67
- lohko, 38
- loppusolmu, 7, 24
- loppusärmä, 7
- luuppi, 3
- lyhin painotettu polku, 30
- lähtöaste, 9
- lähtösolmu, 9

- maalisolmu, 9
- maksimaalinen aligraafi, 14
- maksimiaste, 8
- Mengerin lause, 58
- metsä, 71
- minimaalinen aligraafi, 14
- minimaalinen virittävä puu, 69
- minimaalisen virittävän puun konstruoim-
ti
 - Kruskalin algoritmilla, 70
 - Primin algoritmilla, 70
- minimiaste, 8
- multigraafi, 2

- neliväri-lause, 96
- nollagraafi, 1
- nulliteetti, 36
- nuoli, 3

- oikea alipuu, 106
- oikea lapsi, 106

- oksa, 63
- painotettu graafi, 4
- perusirrotusjoukko, 77
- perussilmukka, 76
- piiri, 25
 - Eulerin, 83
 - Hamiltonin, 87
 - yksinkertainen, 25
- piste, 1
- polku, 24
 - Eulerin, 83
 - Hamiltonin, 87
 - suora, 25
 - tyhjä, 25
 - yksinkertainen, 25
- polun pituus, 25
- Primin algoritmi, 70
- pseudograafi, 3
- puu, 60
- puun korkeus, 105
- pyörä, 11
- päätepiste, 7
- päätesolmu, 7
- Ramsayn luku, 16
- reitti, 24
- rengassumma, 17
- rinnakkaiset särmät, 3
- sarja, 93
- sarjan lyhentäminen, 93
- sarjan pidentäminen, 93
- separoitumaton graafi, 38
- separoituva graafi, 38
- side, 63
- silmukatonta graafi, 29
- silmukka, 11, 25
 - Hamiltonin, 87
- silmukoiden poistaminen, 66
- silmä, 90
- silta, 42
- sisarukset, 98
- sisäjärjestys, 107
- sisämerkintäinen esitysmuoto, 109
- sisäsolmu, 98
- solmu, 1
 - edeltää, 9
 - eristetty, 7
 - loppu-, 7
 - lähtö-, 9
 - maali-, 9
 - pääte-, 7
 - seuraa, 9
 - vierus-, 7
- solmuindusointi, 14
- solmujen yhdistäminen, 18
- solmujoukko, 4
- solmun poisto, 18
- solmun taso, 104
- solmuyhtenäisyysaste, 47
- suora polku, 25
- suoritusjärjestys, 6
- suunnattu graafi, 3
- suunnattu multigraafi, 4
- symmetrinen erotus, 17
- syvyysuuntainen etsintä, 67
- särmä, 1
- särmä kulkee solmujen kautta, 7
- särmä yhdistää solmut, 7
- särmäindusointi, 14
- särmäjoukko, 4
- särmän kertaluku, 2
- särmän kutistaminen, 19
- särmän lisäys, 18
- särmän paino, 4
- särmän poisto, 18
- särmäyhtenäisyysaste, 55
- tapausmatriisi, 21
- tasapainoinen puu, 105
- tasoesitys, 89
- tasograafi, 89

- triviaali graafi, 1
- tuloaste, 9
- tyhjä polku, 25
- täydellinen m -puu, 102
- täydellinen graafi, 10
- täydellinen kaksijakoinen graafi, 11

- unioni, 17

- vahvasti yhtenäinen, 32
- vanhemmat, 98
- vasen alipuu, 106
- vasen lapsi, 106
- vektoriavaruus, 79
- vierusmatriisi, 20, 21
- vierussolmut, 7
- viiva, 1
- virittävä k -puu, 72
- virittävä k -vastapuu, 72
- virittävä aligraafi, 13
- virittävä juurellinen puu, 101
- virittävä metsä, 72
- virittävä puu, 63
- virittävä vastametsä, 72
- virittävä vastapuu, 63
- virittävän puun konstruointi
 - leveyssuuntaisella etsinnällä, 67
 - silmukoiden poistamisella, 66
 - syvyysuuntaisella etsinnällä, 67
- väri-luku, 94

- Waltherin graafi, 33

- yhdistetyt solmut, 31
- yhtenäinen graafi, 31
- yhtenäisyysaste, 47
- yksinkertainen graafi, 1, 2
- yksinkertainen piiri, 25
- yksinkertainen polku, 25