

Todennäköisyyslaskenta (TILTA1A)

Loppukoe, 28.10.2011, klo 9.00-12.00, Pinni A1081

(Ohessa ratkaisut. Tietysti on muitakin oikeita tapoja esittää ratkaisut, niin kuin monella tentissä oli. Oleellista on, että tulos on oikea ja siihen on päädytty jollain oikeaksi tunnistettavalla päättelyllä. Esim. 1. tehtävän ratkaisu on helppo löytää pelkästään luettelemalla eri vaihtoehdot, ei tarvita välttämättä etsiä jotain ”kaavaa”. Kombinatoriikassa ratkaisut on periaatteessa mahdollista esittää luettelemalla vaihtoehdot, mutta useimmiten se on käytännössä mahdotonta (liian työläs tapa äärellisessä ajassa). Silloin tarvitaan jokin ”menetelmä”. Vastauspapereita ei palauteta, mutta paperinsa voi tarkistaa. Paperin voi pyytää nähtäväksi toimistosta huone PINNI B0013 (Sirikka Laaksonen).

1. Viiden pelaajan {Arttu, Eetu, Esa, Paavo, Sakari} joukosta valmentaja valitsee kolmen pelaajan ketjun (joukon). Olkoon M niiden ketjujen lukumäärä, joissa Arttu on mukana, ja N niiden ketjujen lukumäärä, joissa Arttu **ei ole** mukana.
 - (a) Laske M ja N .
 - (b) Esitä kaikkien erilaisten ketjujen lukumäärä M :n ja N :n avulla.

Ratkaisu

- (a) Arttu mukana. Kaksi muuta voidaan valita neljästä 6:lla tavalla: $M = \binom{4}{2} = 6$.
Arttu ei mukana. Kaikki kolme valitaan siitä neljän joukosta, jossa Arttu ei mukana: siis $N = \binom{4}{3} = 4$.
- (b) Kaikki ketjut ovat kaikki kolmen kombinaatiot viidestä ja niiden lukumäärä on $\binom{5}{3} = 10$:

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = M + N = 10.$$

2. Kurssin pitäjä antaa 10 tehtävää ja ilmoittaa, että niistä 5 satunnaisesti valittua tulee tenttiin. Olet opetellut noista kymmenestä 7. Millä todennäköisyydellä tentissä
 - (a) kaikki 5 ovat niitä, jotka olet opetellut?
 - (b) 3 on niitä, joita et ole opetellut?
 - (c) Mikä on tenttiin tulevien opettelemiesi tehtävien todennäköisyysfunktio?

Ratkaisu Katso harjoitus 3.1

- (a) Kaikkien mahdollisten kysymyskombinaatioiden lukumäärä on $\binom{10}{5} = 252$. Kaikkien suotuisten (opettelemiesi) kysymyskombinaatioiden lukumäärä on $\binom{7}{5} = 21$. Vastaus: suotuisat/kaikki = $21/252 = 1/12$.
- (b) Koska tentissä on 3 kysymystä niitä, joita et ole opetellut, on 2 niitä, jotka olet opetellut. Nuo 2 voidaan valita $\binom{7}{2} = 21$ tavalla ja nuo 3 voidaan valita vain yhdellä tavalla. Suotuisten lukumäärä on siis 21. Vastaus on siis $= 21/252 = 1/12$.
- (c) Tenttiin tulevien opettelemiesi tehtävien lukumäärän X todennäköisyysfunktio (Katso alaluvut 2.7 s. 45, alaluku 2.7.1 s. 46 ja kaavakokoelma s. 52.)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\binom{7}{x}\binom{3}{5-x}}{\binom{10}{5}}, & \text{kun } x = 2, 3, 4, 5; \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

3. Oletetaan, että 20% autoilijoista ajaa ylinopeutta tietyllä tieosuudella. Jokaisen auton nopeus mitataan tutkalla. Tutka tunnistaa 90% todellisista ylinopeuksista ja ilmoittaa virheellisesti 15% nopeusrajoitusta noudattavista ylinopeutta ajaviksi.

- (a) Millä todennäköisyydellä tutka ilmoittaa ”ylinopeuden”(todellisen tai virrehälytyksen)?
- (b) Mikä on todennäköisyydellä tutkan ilmoittama ”ylinopeus” on todellinen ylinopeus?

Ratkaisu (Katso alaluku 3.1.1 s. 58 ja tehtävät 5.2. - 5.5.)

- (a) Olkoon A tapahtuma ’ajaa ylinopeutta’ ja B ’tutka ilmoittaa ylinopeuden’. Silloin

$$P(B) = P(A) P(B|A) + P(A^c) P(B|A^c) = 0.20 \cdot 0.90 + 0.80 \cdot 0.15 = 0.30.$$

- (b)

$$P(B|A) = \frac{P(A) P(B|A)}{P(B)} = 0.18/0.30 = 0.60.$$

4. Diskreetin satunnaismuuttujan X kertymäfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 1; \\ 1/2, & \text{kun } 1 \leq x < 2; \\ 3/4, & \text{kun } 2 \leq x < 3; \\ 1, & \text{kun } 3 \leq x. \end{cases}$$

- (a) Laske todennäköisyys $P(X > 2)$.

(b) Määritä X :n todennäköisyysfunktio.

(c) Laske X :n odotusarvo $E(X)$.

Ratkaisu (Ks. alaluvut 2.6.1 ja 2.6.2, harjoitukset 4.1-4.4, 4.7, 6.3)

(a) $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - 3/4 = 1/4$.

(b) X :n arvojoukko $S_X = \{1, 2, 3\}$ ja X :n arvojen todennäköisyydet: $P(X = 1) = F(1) = 1/2$, $P(X = 2) = F(2) - F(1) = 3/4 - 1/2 = 1/4$ ja $P(X = 3) = F(3) - F(2) = 1 - 3/4$. X :n todennäköisyysfunktio on siis

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{kun } x = 1 \\ 1/4, & \text{kun } x = 2, 3 \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

(c) Laske $E(X) = 1 * \frac{1}{2} + 2 * \frac{1}{4} + 3 * \frac{1}{4} = 1.75$.