Todennäköisyyslaskenta Harj. 6 vk 43. 2011

(6.1.) Olk. X oppilaan ikä

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{20}{50}, & x = 18 \\ \frac{22}{50}, & x = 19 \\ \frac{4}{50}, & x = 20 \\ \frac{3}{50}, & x = 21 \\ \frac{1}{50}, & x = 25 \end{cases}$$

$$E(X) = 18 \cdot \frac{20}{50} + 19 \cdot \frac{22}{50} + 20 \cdot \frac{4}{50} + 21 \cdot \frac{3}{50} + 25 \cdot \frac{1}{50}$$
$$= 18{,}92$$

(6.2.) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x, & \text{kun } 0 \le x \le 4 \\ 0, & \text{muutoin} \end{cases}$$

a) $$P(X \le t) = \int_0^t \frac{1}{8}x \, dx = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^t \frac{1}{8}x \, dx = \Big/_0^t \frac{x^2}{16} = \frac{t^2}{16}, \quad \frac{t^2}{16} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow t^2 = 4$$
$$\underline{t = 2}$$

b) $Y = 1$, kun $X \le t$
$Y = 0$, muutoin

$$E(Y) = 1 \cdot P(X \le t) + 0 \cdot (1 - P(X \le t))$$
$$= 1 \cdot \frac{t^2}{16} + 0 \cdot \left(1 - \frac{t^2}{16}\right) = \frac{t^2}{16}, \quad 0 \le t \le 4$$

kun $t = 2$
$$E(Y) = \underline{\frac{1}{4}}$$

(6.3.) $f(-1) = 0{,}2$
$f(3) = 0{,}6$
$f(9) = 0{,}2$

$$E(X) = -1 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}6 + 9 \cdot 0{,}2 = (-1+9) \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}6 = \frac{34}{10}$$
$$= \underline{3{,}4}$$

(6.4.) X = naisten lkm, jotka tanssivat oman parin kanssa $X_i = 1$, jos i. paristuista tanssii yhdessä

a) $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

b) $E(X_i) = 1 \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$

$\therefore E(X) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$

(6.5.) 25 matkustajaa, 7 pysäkkiä

$P(\text{"Matkustaja jää pois 1. pysäkillä"}) = \frac{1}{7}$

$P(\text{"— " — ei jää — " — "}) = \frac{6}{7}$

a) $P(\text{"kukaan ei jää pois 1. pysäkillä"}) = \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{6}{7} = \left(\frac{6}{7}\right)^{25} \approx 0.02$

b) $X_i = 1$, jos joku jää pois i. pysäkillä
$X_i = 0$, jos kukaan ei jää pois i. pysäkillä , $i = 1, 2, \dots, 7$

$P(X_i = 0) = \left(\frac{6}{7}\right)^{25} \approx 0.02$

$P(X_i = 1) = 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^{25} \approx 0.98$

Pysähdysten lkm $X = X_1 + X_2 + \dots + X_7$

$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_7)$
$= 7\left[1 - \left(\frac{6}{7}\right)^{25}\right] \approx 6,85$

$E(X_i) = 1 \cdot \left(1 - \left(\frac{6}{7}\right)^{25}\right) + 0 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{25}$
$= 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^{25}$

(6.6.) Tentävän sanojen pituudet:
7, 13, 4, 4, 5, 8, 9, 6, 17, 1, 7, 5, 6, 5, 18, 10, 2, 9, 6, 4, 4, 1, 2, 5, 10, 4

Sanan pituus	fr.	p
1	2	$\frac{2}{26}$
2	2	$\frac{2}{26}$
4	5	$\frac{5}{26}$
5	4	$\frac{4}{26}$
6	3	$\frac{3}{26}$
7	2	$\frac{2}{26}$
8	1	$\frac{1}{26}$
9	2	$\frac{2}{26}$
10	2	$\frac{2}{26}$
13	1	$\frac{1}{26}$
17	1	$\frac{1}{26}$
18	1	$\frac{1}{26}$

sm X = valitun sanan pituus

$\mu = E(X) = 1 \cdot \frac{2}{26} + 2 \cdot \frac{2}{26} + 4 \cdot \frac{5}{26} + \dots + 18 \cdot \frac{1}{26}$
$\approx \underline{6,615}$

$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{2}{26} + 2^2 \cdot \frac{2}{26} + 4^2 \frac{5}{26} + \dots + 18^2 \frac{1}{26}$
$\approx 61,692$

$\mathrm{Var}(X) = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$
$= 61,692 - 6,615^2 = 61,69 - 43,76$
$= \underline{17,93}$

Luku 4.1.4

(6.7.) $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

X	P
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}$

$Y = X^2$	P
4	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$

$E(X) = (-2)\cdot\frac{1}{4} + (-1)\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} = 0$

$E(XY) = E(XX^2) = E(X^3)$

$= (-2)^3\frac{1}{4} + (-1)^3\frac{1}{4} + 1^3\frac{1}{4} + 2^3\frac{1}{4} = 0$

$\therefore \mathrm{Cov}(X,Y) = \underline{0}$

X ja Y ovat riippumattomat, jos pätee

$P(X=i, Y=j) = P(X=i)P(Y=j)$

Nyt. esim.

$P(X=2, Y=4) = \frac{1}{4} \neq P(X=2)P(Y=4) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$ ja

$\Rightarrow$ X ja Y eivät ole riippumattomia.

(6.8) a) $E(X_k) = 1\cdot\frac{1}{52} = \frac{1}{52} \approx 0.019$

$E(S) = E(X_1 + \cdots + X_{52}) = \sum_{k=1}^{52} E(X_k) = \sum_{k=1}^{52}\frac{1}{52} = \underline{1}$

b) $E(X_iX_k) = 1\cdot\frac{(52-2)!}{52!} = \frac{50!}{52!} = \frac{1}{52\cdot 51} \approx 0.000379$

$S^2 = \sum_{i=1}^{52} X_i^2 + 2\sum_{1\le j<k\le 52} X_jX_k$

$E(S^2) = \sum_{i=1}^{52} E(X_i^2) + 2\sum_{1\le j<k\le 52} E(X_jX_k)$

$= 52\cdot\frac{1}{52} + 2\cdot\binom{52}{2}\cdot\frac{1}{52\cdot 51}$

$= 1 + 1 = 2$

c) $\mathrm{Var}(S) = E(S^2) - [E(S)]^2$

$= 2 - 1 = \underline{1}$