

## Todennäköisyyslaskenta

6. harjoitukset, 43. viikko 2011

6.1. Eräässä 50 oppilaan luokassa oppilaiden ikäjakauma on seuraava:

Ikä $i$ :	18	19	20	21	25
$n_i$ :	20	22	4	3	1

Valitaan yksi oppilas luokasta satunnaisesti. Mikä on hänen ikänsä odotusarvo?

6.2. Oletetaan, että satunnaismuuttujan  $X$  tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x, & \text{kun } 0 \leq x \leq 4; \\ 0, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

- (a) Määritä  $t$ :n arvo siten, että  $P(X \leq t) = 1/4$ ,  
(b) Määritellään satunnaismuuttuja  $Y$  siten, että  $Y = 1$ , kun  $X \leq t$  ja muutoin  $Y = 0$ , missä  $t$ :n arvo on sama kuin a-kohdassa. Laske  $E(Y)$ .

6.3. Satunnaismuuttujan  $X$  kertymäfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq -1 \\ 0.2, & -1 < x \leq 3 \\ 0.8, & 3 < x \leq 9; \\ 1, & x > 9. \end{cases}$$

Määritä satunnaismuuttujan arvot ja arvojen todennäköisyydet (todennäköisyysfunktio) sekä  $E(X)$ .

6.4. Tanssiaisissa on  $n$  pariskuntaa, jotka on numeroitu  $1, 2, \dots, n$ . Naiset valitsevat tanssiparin arvalla eli valitsevat satunnaisesti palauttamatta yhden luvuista  $1, 2, \dots, n$ . Olkoon  $X$  niiden naisten lukumäärä, jotka tanssivat oman parinsa kanssa. Olkoon  $X_i = 1, i = 1, \dots, n$ , jos  $i$ . pariskunta tanssii yhdessä, muutoin  $X_i = 0$ . (vrt. Esimerkki 3.11, s. 74)

- (a) Lausu  $X$  satunnaismuuttujien  $X_1, X_2, \dots, X_n$  avulla.  
(b) Määritä  $X$ :n odotusarvo  $E(X)$ .

6.5. Lentokenttäbussi kuljettaa 25 matkustajaa 7:n pysäkin kautta. Oletetaan, että jokaisella matkustajalla on yhtäsuuri todennäköisyys jäädä pois millä tahansa näistä seitsemästä pysäkistä ja matkustajat toimivat toisistaan riippumatta. Bussi pysähtyy vain jos joku haluaa jäädä pois.

- (a) Millä todennäköisyydellä kukaan ei jää pois 1. pysäkillä?
- (b) Mikä on pysähdysten lukumäärän odotusarvo? (Merkitse  $X_i = 1$ , jos joku jää pois  $i$ . pysäkillä ja  $X_i = 0$ , jos kukaan ei jää pois,  $i = 1, \dots, 7$ .)
- 6.6. Valitse satunnaisesti yksi sana tämän tehtävän tekstistä. Olkoon satunnaismuuttuja  $X$  valitun sanan pituus. Laske satunnaismuuttujan odotusarvo ja varianssi. Huomaa, että myös  $X$  on tässä yhteydessä sana.
- 6.7. Olkoon  $P(X = -2) = P(X = -1) = P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{1}{4}$  ja  $Y = X^2$ . Laske  $\text{Cov}(X, Y)$ . Ovatko  $X$  ja  $Y$  riippumattomat?
- 6.8. Korttipakan 52 korttia on numeroitu 1:stä 52:een. Kortit sekoitetaan satunnaiseen järjestykseen ja pannaan riviin pöydälle. Korteilla on  $52!$  erilaista järjestystä. Niistä yksi on ”oikea”, missä kortit ovat numeroiden mukaan nousevassa järjestyksessä. Määritellään satunnaismuuttuja  $X_k$  siten, että  $X_k = 1$ , jos kortti numero  $k$  on oikealla paikalla ja muutoin  $X_k = 0$ . Silloin  $S = X_1 + \dots + X_{52}$  on oikealla paikalla olevien korttien lukumäärä. Todennäköisyys, että kortti numero  $k$  on oikealla paikalla, on  $1/52$ ,  $k = 1, \dots, 52$ .
- (a) Laske  $E(X_k)$ ,  $k = 1, \dots, 52$  ja  $E(S)$ .
- (b) Laske  $E(X_i X_k)$  ja  $E(S^2)$  (Kun kortti  $i$  ja kortti  $k$  ovat oikealla paikalla, niin  $X_i X_k = 1$ , muutoin  $X_i X_k = 0$ ).
- (c)  $\text{Var}(S) = ?$