

5.1) n naista, m miestä ($n \geq 2, m \geq 2$)

$P(L_1$ ja L_2 naisia sekä L_2 ja L_4 miehiä)

$$= \frac{n}{n+m} \cdot \frac{m}{n+m-1} \cdot \frac{n-1}{n+m-2} \cdot \frac{m-1}{n+m-3}$$

5.2) $E_i \equiv$ 'Ehdotus E_i voittaa P_1 jäsenäänestyksen'

$$P(E_1) = 0.35 \quad P(E_2) = 0.40 \quad P(E_3) = 0.25$$

$B \equiv$ 'S voittaa vaalit'

$$P(B|E_1) = 0.40 \quad P(B|E_2) = 0.35 \quad P(B|E_3) = 0.60$$

Kokonaistodennäköisyyden kaava s. 58 ja s. 69 (3.1.3)

$$P(B) = P(B|E_1)P(E_1) + P(B|E_2)P(E_2) + P(B|E_3)P(E_3)$$

$$= 0.40 \cdot 0.35 + 0.35 \cdot 0.40 + 0.60 \cdot 0.25$$

$$= 0.14 + 0.14 + 0.15 = \underline{\underline{0.43}}$$

5.3) OK. $B \equiv$ 'Hälytin hälyttää ensi yönä'

$A_1 \equiv$ 'Asuntoon murtaudutaan'

$A_2 \equiv$ 'Asuntoon ei murtauduta'

$$P(B|A_1) = 0.95$$

$$P(B|A_2) = \frac{5}{730} \approx 0.006849$$

$$P(A_1) = 2/10000 = 0.0002 \quad (\text{priori tn})$$

$$P(A_2) = 1 - P(A_1) = 0.9998$$

Hälytin soi ensi yönä.

Todennäköisyys, että asuntoon yritetään todella murtautua:

Bayesin kaava s. 58

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} = \frac{\frac{2}{10000} \cdot 0.95}{\frac{2}{10000} \cdot 0.95 + (1 - \frac{2}{10000}) \cdot \frac{5}{730}} \approx \underline{\underline{0.027}}$$

5.4) 3 koiraa K_1, K_2, K_3

$T \equiv$ 'koira on tunnistanut kohteen'

$K_i \equiv$ 'koira K_i tunnistaa kohteen'

$$P(K_1) = P(K_2) = P(K_3) = \frac{1}{3} \quad (\text{priori tn})$$

$$P(T|K_1) = \frac{10}{12}, \quad P(T|K_2) = \frac{9}{12}, \quad P(T|K_3) = \frac{8}{12}$$

Bayesin kaava s. 69 ja s. 58

$$P(T) = \sum_{i=1}^3 P(K_i)P(T|K_i) = \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{12} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{12} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{12} = \frac{27}{36} = 0.75$$

$$P(K_3|T) = \frac{P(K_3)P(T|K_3)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{8}{12}}{\frac{27}{36}} = \frac{\frac{8}{36}}{\frac{27}{36}} = \frac{8}{27} \approx \underline{\underline{0.296}}$$

(5.5.)

Olk. 9 patukkaa joista 3 myrkytetty

$A \equiv$ 'Ensiksi valitsevan sukkaa ei myrkytetty'

$B \equiv$ 'Toiseksi — " —'

$$\underline{P(A)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad ; \quad P(B|A) = \frac{5}{8} \quad ; \quad P(B|A^c) = \frac{6}{8}$$

A ei myrkytetty eli B patukasta vielä 3 myrk. A on myrk. eli B patukasta 2 myrkytettyä

Kokonaistodennäköisyyden kaava s. 58

$$\underline{P(B)} = P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{6}{8} = \frac{10}{24} + \frac{6}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$\therefore P(A) = P(B)$ eli ei väliä kumpi valitsee ensin.

(5.6)

$A \equiv$ "Pariton ensimmäisellä"

$B \equiv$ "Pariton toisella"

$C \equiv$ "Summa pariton"

$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$



a) $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{1}{2}$ $P(C) = \frac{1}{2}$

b) $P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
 $P(A \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
 $P(B \cap C) = \frac{1}{4}$

c) Määntelmä 3.3 Tapahtumat A, B, C riippumattomat, jos

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$P(A \cap C) = P(A)P(C)$

$P(B \cap C) = P(B)P(C)$

ja $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

Nyt kuitenkin

$P(A \cap B \cap C) = 0$, koska A, B ja C ovat toisensa poissulkevat

ja tapahtumat (summa ei voi olla pariton jos molemmilla nopilla heitetaan parittomat)

$P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$

eli

Ei $A \perp B \perp C$

vaikka tapahtumat ovatkin pareittain riippumattomat

eli $A \perp B$, $A \perp C$ ja $B \perp C$

5.7) Olk. $X =$ lasten lkm $P(X=0) = 0.15$ $P(X=1) = 0.25$ $P(X=2) = 0.3$
 $P(X=3) = 0.2$ $P(X=4) = 0.1$
 $T_2 =$ "perheessä täsmälleen kaksi tyttöä"

Kokonaidodennäköisyys

$$P(T_2) = \sum_{i=1}^4 P(X=i) P(T_2|X=i)$$

$$= P(X=0) P(T_2|X=0) + P(X=1) P(T_2|X=1) + P(X=2) P(T_2|X=2) + P(X=4) P(T_2|X=4)$$

$$= P(X=2) P(T_2|X=2) + P(X=3) P(T_2|X=3) + P(X=4) P(T_2|X=4)$$

$$= 0.3 \cdot \frac{1}{4} + 0.2 \cdot \frac{3}{8} + 0.1 \cdot \frac{6}{16} = \underline{\underline{0.1875}}$$

5.8) Aapo heittää lanttia 3 krt $2 \cdot 2 \cdot 2$ tulosvaihtoehtoa
 Eeva " " " 2 krt. $2 \cdot 2$ tulostv.
 Aapo voittaa, jos kruunien lkm $>$ Eevan saamien tr lkm.

$V \equiv$ "Aapo voittaa" $P(A_2) = \frac{\binom{3}{2}}{8}$
 $E_i \equiv$ "Eeva saa i kruunaa"
 $A_j \equiv$ "Aapo saa j kruunaa"

$$P(E_0) = \frac{1}{4}, \quad P(E_1) = \frac{1}{2}, \quad P(E_2) = \frac{1}{4}$$

$$P(V|E_0) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1 - P(A_4) = \frac{7}{8}$$

$$P(V|E_1) = P(A_2 \cup A_3) = P(A_2) + P(A_3) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8}$$

$$P(V|E_2) = P(A_3) = \frac{1}{8}$$

Kokonaidodennäköisyys

$$P(V) = \sum_{i=0}^2 P(E_i) P(V|E_i) = P(E_0) P(V|E_0) + P(E_1) P(V|E_1) + P(E_2) P(V|E_2)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{32} + \frac{8}{32} + \frac{1}{32} = \frac{16}{32} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$