

otanta palauttamatta
kts. (2.7.1) s. 46

31 (a) $f(x) = \frac{\binom{7}{x} \binom{10-7}{5-x}}{\binom{10}{5}}$

$$f(5) = \frac{\binom{7}{5} \binom{10-7}{5-5}}{\binom{10}{5}} = \frac{\binom{7}{5} \binom{3}{0}}{\binom{10}{5}} = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{10}{5}} \approx 0.0833$$

b) P ("ainakin 4 tehtävää on sellaisia, jotka opiskelija on opetellut")

$$\begin{aligned} f(4) + f(5) &= \frac{\binom{7}{4} \binom{10-7}{5-4}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{7}{5} \binom{10-7}{5-5}}{\binom{10}{5}} = \frac{\binom{7}{4} \binom{3}{1}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{7}{5} \binom{3}{0}}{\binom{10}{5}} \\ &= \frac{\binom{7}{4} \cdot 3 + \binom{7}{5}}{\binom{10}{5}} = 0.5 \end{aligned}$$

32 12 lasta, 8 makeista

kts. s. 31 $\binom{k+r-1}{r} = \binom{k+r-1}{k-1}$
"valitaan palauttaen 8 lasta, joille annetaan makeinen" $k=12, r=8$

$$\binom{12+8-1}{8} = \binom{12+8-1}{11}, \text{ koska}$$

[järjestystä ei oteta huomioon]

$$\binom{19}{8} = \frac{19!}{8!(19-8)!} = \frac{19!}{8!11!} = 75582$$

$$\binom{19}{11} = \frac{19!}{11!(19-11)!} = \frac{19!}{11!8!} = \underline{\underline{75582}}$$

33 $A = \{\text{salasanat; 8merkkiä}\}$

$B = \{\text{salasanat; 8merkkiä ja ei pieniä kirjaimia}\}$

$C = \{\text{salasanat; 8merkkiä ja ei isoja kirjaimia}\}$

Vastaus = $|A| - |B \cup C|$

$$|A| = \binom{26+26+10}{(2.1.1)} = 62^8$$





valinta palauttaen järjestyksessä s. 28

$$|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|$$

"pelkkiä numeroita"

$$|B| = (26+10)^8 = 36^8, |C| = 36^8, |B \cap C| = 10^8$$

$$\therefore |A| - |B \cup C| = 62^8 - (36^8 + 36^8 - 10^8) = 212\,697\,985\,769\,984$$

34.  4:llä taholla 4, 2:lla 0 $P(4) = \frac{2}{3}$, $P(0) = \frac{1}{3}$
-  6:lla taholla 3 $P(3) = 1$
-  4:llä taholla 2, 2:lla 6 $P(2) = \frac{2}{3}$, $P(6) = \frac{1}{3}$
-  4:llä taholla 5, 2:lla 1 $P(5) = \frac{2}{3}$, $P(1) = \frac{1}{3}$

a) $P(\text{"B voittaa C:n"}) = \frac{2}{3}$ (kun C nopalla 2)

b) $P(\text{"C voittaa D:n"}) = \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}_{C_2 D_1} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{C_6} = \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{5}{9}$

c) $P(\text{"D voittaa A:n"}) = \underbrace{\frac{2}{3}}_{D_5} + \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}_{D_1 A_0} = \frac{6}{9} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$

35. $\{a, a, k, e, e, e, h\}$

kts. Esim. 2.6

a) $\binom{7}{2} \binom{5}{1} \binom{4}{3} \binom{1}{1} = \frac{7!}{2!1!3!1!} = 420$

b) kts. s. 33 Lause 2.8 (Multinomilause)

$$(2.9.11) (t_1 + t_2 + \dots + t_k)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} \binom{n}{n_1 n_2 \dots n_k} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots t_k^{n_k}$$

Tässä $n=7$ ja $k=5$ kysyttiin termiä $x_1^2 x_2^0 x_3^1 x_4^3 x_5^1$ kerrointa, valitaan $n_1=2, n_2=0, n_3=1, n_4=3, n_5=1$ ja saadaan kertoimeksi $\binom{7}{2 \ 0 \ 1 \ 3 \ 1} = \frac{7!}{2! \cdot 0! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 1!}$

36.

$a=3$ $b=2$

Vrt. s. 37

Esim. 2.13

$P(\text{"A on edellä koko lastentaprosessin ajan"}) = \frac{3-2}{3+2} = \frac{1}{5}$

• $a a a b b$

$b b a a a$

• $a a b a b$

$a b a a b$

$b a a a b$

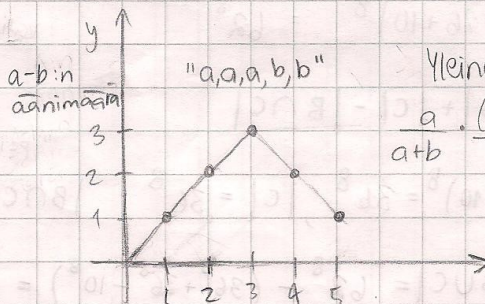
$a a b b a$

$a b a b a$

$b a a b a$

$a b b a a$

$b a b a a$



Yleinen tapaus:

$$a \cdot \frac{(a+b-1) - \binom{a+b-1}{a}}{(a+b-1)} = \frac{(a-b)}{(a+b)}$$

37. 20 kysymystä, jokaisessa 4 vastausvaihtoehtoa, joista 1 oikein.
Vastauspaperien lkm, jossa 70% oikein?

$$70\% = 0.7 \cdot 20 = 14 \text{ oikein}$$

14 oikeaa vastausta voi muodostaa 20:stä $\binom{20}{14}$ tavalla.
6 vastausta väärin, jokaisessa kysymyksessä neljästä
vaihtoehtosta 3 on väärin. Joten väärää
vääriä vastausvaihtoehtoja on 3^6 .

Tuloperiaatteen nojalla

$$\text{Vastaus} = \binom{20}{14} \cdot 3^6 = 28\,256\,040$$

38. A J Q K A
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
ässä ässä

Alin kortti voidaan valita $\binom{10}{1}$ tavalla eli
5 peräkkäistä korttia voidaan valita 10:llä tavalla

Jokaiselle ^{viidelle} kortille 4 eri maata eli 4 vaihtoehtoa: 4^5 valintaa

$$\text{Värisuorat: } 10 \cdot 4 = 40 \text{ kpl}$$

$$\text{Joten suotuisia tapauksia on: } 10 \cdot 4^5 - 40 = 10\,200$$

5 korttia voidaan valita 52:sta $\binom{52}{5}$ tavalla

$$\text{Kysytty todennäköisyys: } \frac{10\,200}{\binom{52}{5}} = \frac{10\,200}{2\,598\,960} \approx 0,0039$$