Todennäköisyyslaskenta Harj. 2 vk 38 2011

(2.1.) Bonferronin epäyhtälö s.24

(2.1.5) $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$

a) Bonferronin epäyhtälön nojalla

$P(A_1 \cap A_2) \geq P(A_1) + P(A_2) - 1$

koska

$P(A_1^c) = 1 - P(A_1)$ eli $P(A_1) = 1 - P(A_1^c)$ ja

$P(A_2^c) = 1 - P(A_2)$ eli $P(A_2) = 1 - P(A_2^c)$

niin

$P(A_1 \cap A_2) \geq 1 - P(A_1^c) + 1 - P(A_2^c) - 1$

$P(A_1 \cap A_2) \geq 1 - P(A_1^c) - P(A_2^c)$

$P(A_1 \cap A_2) \geq 1 - [P(A_1^c) + P(A_2^c)]$

b) Boolen epäyhtälö $P(\bigcap_{i=1}^{3} A_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{3} P(A_i^c)$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P[(A_1 \cap A_2) \cap A_3]$

a)-kohdan avulla

$P[(A_1 \cap A_2) \cap A_3] \geq 1 - [P[(A_1 \cap A_2)^c] + P(A_3^c)]$

$= 1 - [P(A_1^c \cup A_2^c) + P(A_3^c)]$ de Morganin lait s.6

$= 1 - [P(A_1^c) + P(A_2^c) - P(A_1^c \cap A_2^c) + P(A_3^c)]$ (2.1.1) s.23

$= 1 - P(A_1^c) - P(A_2^c) - P(A_3^c) + P(A_1^c \cap A_2^c)$

$\geq 1 - P(A_1^c) - P(A_2^c) - P(A_3^c)$

$= 1 - \sum_{i=1}^{3} P(A_i^c)$

(2.2.) $\Omega = \{RRR, RRL, RLR, LRR, RLL, LRL, LLR, LLL\}$

$A = \{RLR, LRL\}$

$A^c = \{RRR, RRL, LRR, RLL, LLR, LLL\}$

$B = \{RRR, RLR, LRR, LLR\}$

$B^c = \{RRL, RLL, LRL, LLL\}$

$A \cup B = \{RLR, LRL, RRR, LRR, LLR\}$

$B^c \setminus A = \{RRL, RLL, LLL\} = B^c \cap A^c$

(2.3.) Olk. $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathcal{A}$ kaikkien sellaisten Ω:n osajoukkojen A joukko, että joko A tai A^c on äärellinen.

s. 10 Määritelmä 1.2

a_1: $\Omega \in \mathcal{A}$
Koska $\Omega^c = \emptyset$ äärellinen, niin $\Omega \in \mathcal{A}$.

a_2: Jos $A \in \mathcal{A}$, niin $A^c \in \mathcal{A}$, koska joko A^c tai $(A^c)^c = A$ on äärellinen määritelmän mukaan.

a_3: $A, B \in \mathcal{A}$.
1. Jos A & B äärellinen, niin $A \cup B$ äärellinen ja $A \cup B \in \mathcal{A}$
2. Jos A^c tai B^c tai molemmat äärellisiä, niin $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ on äärellinen ja siis $A \cup B \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ on algebra

(2.4.) $A_n \equiv$ "kruuna n. heitolla"
$A_n^c \equiv$ "klaava n. heitolla"

"Kruuna heitoilla 2, 5 ja 10 tai klaava heitoilla 7 ja 12"

$$(A_2 \cap A_5 \cap A_{10}) \cup (A_7^c \cap A_{12}^c)$$

(2.5.) $A_1 \equiv$ "palauttaa rahan" $P(A_1) = 0.6$
$A_2 \equiv$ "yhdistää numeroon" $P(A_2) = 0.2$
$A_3 \equiv$ "vie rahat eikä yhdistä" $P(A_3) = 0.3 \Rightarrow P(A_3^c) = 1 - 0.3 = 0.7$
$P(A_1 \cap A_2) = ?$

$A_3 = A_1^c \cap A_2^c$ De Morganin lakien perusteella $\rightarrow$
$A_3^c = (A_1^c \cap A_2^c)^c = (A_1^c)^c \cup (A_2^c)^c = A_1 \cup A_2$

$$P(A_3^c) = P(A_1 \cup A_2) \overset{(2.1.1)\, s.23}{=} P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

josta saadaan

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_3^c)$$
$$= 0.6 + 0.2 - 0.7$$
$$= \underline{0.1}$$

2.6 a) miehet istuvat joka toisella tuolilla

M N M N M N M N M N

$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 5!5!$

N M N M N M N M N M

$= 5!5!$

yhteensä $2 \cdot 5!5! = 28\,800$

b) Mitkään kaksi miestä eivät istu vierekkäin

M N M N M N M N M N $5!5!$ } jokatoisella
N M N M N M N M N M $5!5!$
M N N M N M N M N M $5!5!$
M N M N N M N M N M $5!5!$
M N M N M N N M N M $5!5!$
M N M N M N M N N M $5!5!$

yhteensä $6 \cdot 5!5! = 86\,400$

2.7 $D_2 = \{2, 4, \ldots, 100\}$ lukumäärä $|D_2| = \frac{|\Omega|}{2} = \frac{100}{2} = 50$

$D_3 = \{3, 6, \ldots, 99\}$ lukumäärä $|D_3| = \lfloor \frac{100}{3} \rfloor = 33$

$D_5 = \{5, 10, \ldots, 100\}$ lukumäärä $|D_5| = \frac{100}{5} = 20$

s.24 Lause 2.5

$|D_2 \cup D_3 \cup D_5| = |D_2| + |D_3| + |D_5| - |D_2 \cap D_3| - |D_2 \cap D_5| - |D_3 \cap D_5| + |D_2 \cap D_3 \cap D_5|$

$|D_2 \cap D_3| = \lfloor \frac{100}{2 \cdot 3} \rfloor = 16$ $\quad |D_2 \cap D_5| = \frac{100}{2 \cdot 5} = 10$ $\quad |D_3 \cap D_5| = \lfloor \frac{100}{3 \cdot 5} \rfloor = 6$

$|D_2 \cap D_3 \cap D_5| = \lfloor \frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 5} \rfloor = 3$

siis

$|D_2 \cup D_3 \cup D_5| = 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = \underline{\underline{74}}$

2.8

1€	1€	2€	voitto yhteensä
R	R	R	$1+1+2=4$
R	R	L	$1+1=2$
R	L	R	$1+2=3$
L	R	R	$1+2=3$
R	L	L	$1=1$
L	R	L	$1=1$
L	L	R	$2=2$
L	L	L	$=0 \Rightarrow$ ei voita mitään

Pelissä ei voita jos $A = \{LLL\}$ sattuu.
Pelissä voittaa jos A^c sattuu.
Tn, että voittaa on $P(A^c) = 1 - P(A)$
$= 1 - 1/8$
$= \underline{\underline{\frac{7}{8}}}$