

Todennäköisyyslaskenta

2. harjoitukset, 38. viikko 2011

2.1. Näytä Boferronin epäyhtälön (s. 24) avulla, että

(a) $P(A_1 \cap A_2) \geq 1 - [P(A_1^c) + P(A_2^c)].$

(b) Näytä esimerkiksi a -kohdan avulla, että Boolean epäyhtälö

$$P(\cap_{i=1}^3 A_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^3 P(A_i^c)$$

pitää paikkansa.

2.2. Tehtävän 1.6(a) satunnaiskoe oli lantin heitto kolme kertaa ja otosavaruuden Ω muodostivat kruunan (R) ja klaavan (L) kolmikot (8 kpl). Olkoon $A \equiv$ ”Kruuna ja klaava vuorottelevat” ja $B \equiv$ ”Kruuna viimeisellä” Määritä tapahtumat $A^c, B^c, A \cup B$ ja $B^c \setminus A$.

2.3. Olkoon $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$ luonnollisten lukujen joukko ja olkoon \mathcal{A} kaikkien sellaisten Ω :n osajoukkojen A joukko, että joko A tai A^c on äärellinen. Näytä, että \mathcal{A} on algebra (Määritelmä 1.2).

2.4. Heitetään lanttia äärettömän monta kertaa. Silloin ”luonnollinen” otosavaruus Ω muodostuu jonoista (x_1, x_2, \dots) , missä $x_i = 1$, jos i . heitto on kruuna ja muuoin $x_i = 0$. ”Yksinkertainen” tapahtuma A_n määritellään ”Kruuna i . heitolla, ts. A_n muodostuu äärettömistä jonoista (x_1, x_2, \dots) , missä $x_n = 1$. Lausu tapahtuma ”Kruuna heitoilla 2, 5 ja 10 tai klaava heitoilla 7 ja 12” yksinkertaisten tapahtumien avulla.

2.5. Eräs viallinen julkinen puhelin on sellainen, että se palauttaa rahan todennäköisyydellä 0.6, se yhdistää antamaasi numeroon todennäköisyydellä 0.2 ja vie rahasi eikä yhdistä haluamaasi numeroon todennäköisyydellä 0.3. Millä todennäköisyydellä soitat valitsemmaasi numeroon ilmaiseksi.

2.6. Viisi miestä ja viisi naista istuu rivissä kymmenellä tuolilla. Määritä sellaisten järjestysten lukumäärä, että

(a) miehet istuvat joka toisella tuolilla.

(b) Mitkään kaksi miestä eivät istu vierekkäin.

2.7. Kuinka monta kokonaislukua väliltä $[1, 100]$ on jaollisia 2:lla, 3:lla tai 5:llä. Nyt siis $\Omega = \{1, 2, \dots, 100\}$ ja merkitään kahdella jaollisia $D_2 = \{2, 4, \dots, 100\}$, kolmella jaollisia $D_3 = \{3, 6, \dots, 99\}$ ja viidellä jaollisia $D_5 = \{5, 10, \dots, 100\}$. Laske siis joukon $D_2 \cup D_3 \cup D_5$ alkioiden lukumäärä $|D_2 \cup D_3 \cup D_5|$. Esitä tulos yhteenlaskulauseen (Lause 2.5, s. 24) avulla (Korvaa todennäköisyys P lukumäärämitalla $|\cdot|$).

2.8. Pelaamme peliä, jossa heitetään kolmea lanttia, joista kaksi on euron ja yksi kahden euron lantti. Saamme pitää lantit, jotka putoavat kruuna ylöspäin. Mikä on todennäköisyys voittaa jotain tässä pelissä?