Todennäköisyyslaskenta
1. harjoitukset, 37. viikko 2011

1.1. Viisi hakijaa M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, joista M_1, M_2, M_3 ovat miehiä ja N_1, N_2 naisia, hakevat kahta samanlaista työpaikkaa. Työnantaja valitsee kaksi hakijoista. Olkoon Ω otosavaruus, eli työnantajan kaikkien mahdollisten eri valintojen joukko. Otosavaruuden Ω osajoukko A koostuu niistä alkeistapuksista, joissa valitut ovat pelkästään miehiä, ja B koostuu niistä valinnoista, joissa ainakin toinen on nainen. Luettele joukkojen $A, B^c, A \cup B, A \cap B$ ja $A \cap B^c$ alkeistapaukset.

1.2. Koripallojoukkueet A ja B pelaavat loppuottelusarjan "paras viidestä". Joukkue, joka voittaa ensin kolme peliä, on mestari. Yksi sarjan tulos on esimerkiksi AAA eli A voittaa kaikki yksittäiset pelit ja sarjan. Kuinka monella eri tavalla pelisarja (satunnaiskoe) voi päättyä? Luettele kaikki neljän pituiset ja viiden pituiset pelisarjat.

1.3. Henkilöt a ja b saapuvat kahvilaan ja istuutuvat neliön muotoiseen pöytään, jossa jokaisella sivulla on yksi tuoli. Oletetaan, että olemme kiinnostuneet tapahtumasta $A \equiv$ "a ja b eivät istu vastakkain".

   (a) Konstruoi 12 istuma-asetelman otosavaruus.
   (b) Jos olemme kiinnostuneita vain tapahtumasta A, ei henkilöitä tarvitse nimetä. Luetellaan (luettele) vain erilaiset asetelmat (6 kpl), joissa istutaan vastakkain tai vierekkäin.
   (c) Montako alkeistapausta muodostaa tapahtuman a-kohdassa ja montako b-kohdassa.

1.4. Voidaanko edellisen tehtävän tilanteessa otosavaruutta vielä yksinkertaistaa? Ajattele, että toinen henkilöistä valitsee ensin tuolin.

1.5. Crabs-pelissä pelaaja heittää kahta noppaa. Jos silmälukujen summa on 7 tai 11, hän voittaa (tietyn panoksen) heti. Jos silmälukujen summa on 2, 3 tai 12, hän häviää heti. Muutoin silmälukujen summa x ($x \notin \{2, 3, 7, 11, 12\}$) on hänen pisteensä ja pelaaja jatkaa heittämistä, kunnes saa uudestaan summan x (voitaa) tai saa summan 7 (häviää). Kuvaile tapahtuma "Pelaaja voittaa pisteluvulla $x = 5$".

1.6. Heitetään lanttia 3 kertaa.

   (a) Muodostetaan otosavaruus Ω erilaisista kolmikoista xyz (8 kpl), missä $x = R$ (kruuna) tai $x = R$ (klaava). Vastaavasti y ja z saavat arvot R tai L.

(b) Olkoon $\Omega* = \{0, 1, 2, 3\}$ vaihtoehtoinen otosavaruus, missä $i \in \Omega*$ on kruunien lukumäärä. Mitkä seuraavista Ω:n osajoukoista (tapahtumista) eivät ole tapahtumia $\Omega*$:ssä?
$A_1 \equiv$ "Enemmän kuin kaksi kruunaa", $A_2 \equiv$ "Kruuna toisella heitolla",
$A_3 \equiv$ "Enemmän klaavoja kuin kruunuja", $A_4 \equiv$ "Ainakin yksi klaava ja kruuna viimeisellä",
$A_5 \equiv$ "Ainakin kaksi samaa", $A_6 \equiv$ "Kruuna ja klaava vuorottelevat".

1.7. Tutkija haluaa selvittää haastattelemalla, paljonko väestössä on toimintaa Q harrastavia henkilöitä (esim. huumeiden käyttäjiä). Suoraan kysymykseen "Oletko käyttänyt huumeita viimeisen vuoden aikana?"tuskin saadaan totuuden mukaista vastausta. Siksi on tärkeää vakuuttaa vastaaja, että vastaajan henkilöllisyys ei paljastu. Siksi tutkija käytää seuraavaa menettelyä: Vastaajalle annetaan kaksi noppaa, musta ja valkoinen. Vastaaja heittää samanaikaisesti näitä kahta noppaa siten, että kukaan vastaajan lisäksi ei näe kokeen tulosta. Ohjeena on vastata kysymykseen "Oletko Q-henkilö?", jos mustan nopan silmäluku on pariton. Jos mustan nopan silmäluku on parillinen, vastaaja vastaa kysymykseen "Onko valkoisen nopan silmäluku 1?"Tutkija tietää vastauksen "kyllä"tai "ei", mutta hän ei tiedä, mihin kysymykseen se on vastaus. Otosavaruus muodostuu pisteistä (i, x, y), missä x on mustan ja y valkoisen nopan silmäluku ja $i = 1$, jos henkilö on Q-henkilö ja muutoin $i = 0$. Montako pistettä otosavaruudessa on? Vastaus $f(i, x, y)$ on 1 ($\equiv$ "kyllä") tai 0 ($\equiv$ "ei") riippuu siis kolmikon (i, x, y) arvosta. Määritä funktio $f(i, x, y)$.

1.8. Tarkastellaan veikkausliigassa joukkueen A peliä eräällä kierroksella. Olkoon A_1 tapahtuma, että kotijoukkue voittaa, ja A_2 tapahtuma, että vierasjoukkue voittaa. Tapahtuma A_3 on tasapeli. Voit kirjoittaa näistä tapahtumista sekä niistä muodostetuista yhdistetyistä tapahtumista seteleitä, joista maksat myymäsi setelin ostajalle 10 euroa, jos kyseinen tapahtuma sattuu. Jos tapahtuma ei satu, et maksa mitään. Oletetaan, että joku tarjoutuu ostamaan kotijoukkueen voittoa koskevan setelin hintaan 7.5 euroa, vierasjoukkueen voittoa koskevan setelin hintaan 2 euroa ja tasapelille kirjoitetun setelin hintaan 1 euro. Vastaavasto voin ostaa tällaiset setelit häneltä. Mitä kauppoja sinun kannattaa tehdä, jotta takaat varman voiton itsellesi. Kuinka paljon voit voittaa varmasti, jos ostat tai myyt korkeintaan 4 seteliä.