

1. Estimoi sydänleikkausaineiston hierarkkinen malli käyttäen JAGS:ia ja vertaa tuloksia R:llä saatuihin.
2. Käytimme sydänleikkausaineiston analysoinnissa logit-linkkiä  $\beta_j = \log(\theta_j/(1 - \theta_j))$ . Toinen yleisesti käytetty vaihtoehto olisi käyttää probit-linkkiä  $\beta_j = \Phi^{-1}(\theta_j)$ , missä  $\Phi^{-1}(\cdot)$  tarkoittaa standardoidun normaalijakauman kertymäfunktion käänteisfunktioita.
  - a) Johda parametrin  $\beta_j$  täydellinen ehdollinen jakauma käytettäessä probit-linkkiä. Tutki jakauman tiheysfunktion log-konkaavisuutta graafisesti kiinnittämällä  $y_j$ ,  $m_j$ ,  $\mu$  ja  $\sigma^2$ .
  - b) Toista analyysi R:llä käyttäen probit-linkkiä, ja tarkista että suppeneminen tapahtuu.
3. Olkoon  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  satunnaisotos jakaumasta  $N(\mu, \tau^{-1})$ . Olkoot parametrit riippumattomia ja niiden priorijakaumat  $\mu \sim N(\mu_0, \tau_0^{-1})$  ja  $\tau \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ .
  - a) Osoita, että parametrien ehdolliset jakaumat ovat

$$\{\mu|\tau, y\} \sim N\left(\frac{\tau \sum Y_i + \tau_0 \mu_0}{\tau n + \tau_0}, \frac{1}{\tau n + \tau_0}\right)$$

$$\{\tau|\mu, y\} \sim \text{Gamma}(\alpha + n/2, \beta + \sum (Y_i - \mu)^2/2).$$

- b) Valitse haluamasi arvot  $\mu$  ja  $\tau$  ja generoi 50 havainnon satunnaisotos. Tämän jälkeen yritä estimoida parametrit käyttämällä Gibbsin poimintaa (valitse sopivasti priorijakauman parametrit.) Määritä simuloinnin perusteella parametreille Bayes-estimaatit neliöllisellä tappiofunktioilla ja 95 % posteriorivälit.
4. Oletetaan, että meillä on riippumattomia havaintoja  $Y_i$  vaihtelevan pituisilta ajanjaksoilta  $t_i$  ja että  $Y_i$  on havainto Poissonin prosessista, jonka intensiteetti on  $\theta_i$ . Tällöin  $Y_i|\theta_i \sim \text{Poisson}(\theta_i t_i)$ , missä  $t_i$ :t ovat tunnettuja. Oletetaan, että  $\theta_i$ :t ovat riippumattomia ja noudattavat gammajakaumaa, jonka tiheysfunktio on  $\theta_i^{\alpha-1} e^{-\beta \theta_i} \beta^\alpha / \Gamma(\alpha)$ , missä  $\alpha$  on tunnettu ja  $\beta$ :lla on priorijakauma

$$p(\beta) = \beta^{\gamma-1} e^{-\delta \beta} \delta^\gamma / \Gamma(\gamma).$$

- a) Johda tarvittavat ehdolliset jakaumat ja selitä kuinka Gibbsin poimintaa käyttämällä voidaan estimoida parametrien  $\theta_i$  ja  $\beta$  reunajakaumat, kun aineisto  $y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$  on annettu.
  - b) Olkoot  $\alpha = 10$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\delta = 1$  ja havaintoaineisto seuraavanlainen:

$t_i$	2	3	5	1	7
$y_i$	2	6	14	1	16

Koodaa Gibbsin poimija R:llä ja määritä 95% posteriorivälit tuntemattomille parametreille.