

1. Olkoon kaksitilaisen Markovin ketjun siirtymätodennäköisyyksien matriisi

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}. \text{ Todista induktiolla, että } P^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n \end{pmatrix}.$$

2. Kauppa varastoi tiettyä tuotetta (s, S) -periaatteen mukaisesti. Jos varastossa on tuotetta illalla myynnin loputtua x kpl, se tilaa tilaa tuotetta

$$\begin{cases} 0, & \text{jos } x \geq s \\ S - x, & \text{jos } x < s. \end{cases}$$

Tilaus toteutetaan seuraavaan aamuun mennessä. Päivittäiset kysynät ovat riippumattomia ja ovat j:n suuruisia todennäköisyydellä α_j . Kaikki pyynnöt, joita ei voida välittömästi toteuttaa, menetetään. Merkitään X_t :llä varastotilannetta t . myyntipäivän loputtua. Osoita, että $\{X_t, t \geq 1\}$ on Markovin ketju ja määritä sen siirtymätodennäköisyydet.

3. Sarjassa riippuvia satunnaiskokeita on kaksi vaihtoehtoa: onnistuminen ja epäonnistuminen. Onnistumisen todennäköisyys on $(k+1)/(k+2)$, missä k on onnistumisten lukumäärä kahdessa edellisessä kokeessa. Määritä

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(\text{'onnistuminen } n. \text{ kokeessa'}).$$

(Ohje: Tarkastele Markovin ketjua, jossa tila määräytyy kahden peräkkäisen satunnaiskokeen perusteella).

4. a) Arvotaan (riippumattomasti) lukuja 0,1,...,9 niin, että kaikki luvut ovat yhtä todennäköisiä. Mikä on tarvittavien arvontojen odotusarvo, että peräkkäiset arvot luvut muodostavat jonon 5457545 ?

b) Apina kirjoittaa kirjoituskoneella kirjaimia A, B, ..., Ö niin, että kaikki kirjaimet ovat yhtä todennäköisiä. Jos se kirjoittaa yhden kirjaimen sekunnissa, mikä on odotettu aika sille, että se saa kirjoitettua sana ABRACADABRA?

5. Tarkastellaan 4-tilaisen satunnaishetken peräkkäisiä havaintoja (250 havaintoparia).

1. tila \ 2. tila	1	2	3	4	Yht.
1	20	18	12	17	67
2	6	22	15	13	56
3	4	6	14	11	35
4	10	19	23	40	92
Yht.	40	65	64	81	250

Testaa hypoteesia, että peräkkäiset havainnot ovat riippumattomia vs. että ne muodostavat Markovin ketjun.

a) Käytä uskottavuussuhdetestisuureta ja sen asymptoottista jakaumaa.

b) Käytä Pearsonin testisuureta (tavallinen χ^2 -riippumattomuustesti)

c) Tutki poikkeamien $(O - E)/E^{1/2}$ normaalisuutta QQ-kuviolla.

6. Markovin ketjusta saadaan havainnot y_0, y_1, \dots, y_k ajankohtina $t_0 < t_1 < \dots < t_k$, missä kaikki välit $t_j - t_{j-1}$ eivät ole ykkösen mittaisia. Kirjoita uskottavuusfunktio käyttäen n askelen siirtymätodennäköisyyksiä $p_{rs}^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$. Sijoita uskottavuusfunktioon toteutuneet arvot, kun on havaittu tilat 1, 2, 3, 1, 1 ajanhetkinä 0, 1, 3, 4, 6 kolmitilaisesta Markovin ketjusta, jonka stationaarinen jakauma on π .