

1. Jokainen stokastinen matriisi määrittelee aikahomogeenisen Markovin ketjun. Mitkä seuraavista matriiseista ovat stokastisia? Piirrä Markovin ketjuja vastaavat automaattit.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Tarkastellaan jonoa Bernoulli-kokeita, joissa on kaksi vaihtoehtoa: onnistuminen 'O' ja epäonnistuminen 'E'. Kaksi peräkkäistä koetta muodostaa Markovin ketjun $\{X_t, t = 2, 3, \dots\}$ tilan seuraavasti:

$$X_t = \begin{cases} 1, & \text{kun saadaan OO} \\ 2, & \text{kun saadaan OE} \\ 3, & \text{kun saadaan EO} \\ 4, & \text{kun saadaan EE} \end{cases} \quad \text{kokeissa } t-1 \text{ ja } t$$

Määritä siirtymämatriisi P ja sen kaikki potenssit P^n .

3. Määritä seuraavia siirtymämatriiseja vastaavien Markovin ketjujen luokat, ja päättele, ovatko ne väistyviä (transient) vai palautuvia (recurrent). Määritä myös luokkien jaksot.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Laske edellisen tehtävän matriisiin P_1 määrittelemälle Markovin ketjulle todennäköisyydet siirtyä tilasta 1 kolmella askelella tiloihin 1, 2 ja 3.
5. Maa on jaettu kolmeen alueeseen. Kunakin vuonna 5% alueen 1 asukkaista siirtyy alueelle 2 ja 5% alueelle 3. Alueen 2 asukkaista 15% siirtyy alueelle 1 ja 10% siirtyy alueelle 3. Alueen 3 asukkaista 10% siirtyy alueelle 1 ja 5% alueelle 2. Mikä osuus väestöstä asuu kussakin alueessa pitkän ajan kuluttua? Määritä myös keskimääräiset paluuajat $E(T_{11})$, $E(T_{22})$ ja $E(T_{33})$.
6. Tarkastellaan symmetrisen nopan heittoja. Määritellään stokastinen prosessi $\{X_t\}$ niin, että $X_t = j$, jos suurin silmäluku t heiton jälkeen on j . Onko kyseessä Markovin ketju? Kirjoita siirtymämatriisi P ja määritä sen kaikki potenssit P^n .