TAMPEREEN YLIOPISTO
MTF/Tilastotiede
Tilastollinen päättely 2; Harj. 4; 3.10.2014

1. Olkoon $y = (y_1, ..., y_n)$ otos normaalijakaumasta jonka odotusarvo μ on tunnettu mutta varianssi tuntematon. Olkoon θ tämän varianssin käänteisluku. Siis $y_i \sim N(\mu, \theta^{-1})$.

   i) Kirjoita θ:n uskottavuusfunktio.

   ii) Oletetaan priorijakauma

$$p(\theta) = \frac{(\beta/2)^{\alpha/2}}{\Gamma(\alpha/2)} \theta^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\frac{\beta}{2}\theta}, \quad \theta > 0,$$

   jota voidaan pitää yleistyksenä χ^2-jakaumasta. (Se on myös gamma-jakauma, mutta eri tavoin parametroitu). Näytä, että $\phi = \beta\theta$ noudattaa tavallista χ^2-jakaumaa α vapausasteella.

   iii) Määritä posteriorijakauma. Onko se samaa jakaumaperhettä kuin priorijakauma?

   iv) Määritä havaintojen prioriennustejakauma (reunauskottavuusfunktio) $p(y)$.

   v) Määritä uuden havainnon posterioriennustejakauma $p(\tilde{y}|y)$.

   vi) Tee parametrinmuunnos, jolla posteriorijakaumasta tulee χ^2-jakauma. Käyttäen χ^2-jakauman kvantiileja muodosta muunnetulle parametrille 95% tasahäntäinen todennäköisyysväli ja muunna se vastaavaksi väliksi varianssille θ^{-1}. Määritä väli siinä tapauksessa, että $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2 = 100$, $\alpha = \beta \approx 0$ ja n=20. ($\chi^2_{20;0.025} = 9.59$, $\chi^2_{20;0.975} = 34.17$).

   vii) Hypoteesia $H_0 : \theta^{-1} = 2$ vs. $H_1 : \theta^{-1} \neq 2$ voidaan testata bayesiläisittäin kahdella tavalla: 1) Tutkimalla kuuluuko 2 posterioriväliin 2) Laskemalla Bayesin tekijä $B_{10} = p(y|H_1)/p(y|H_0)$. Määritä tässä tapauksessa Bayesin tekijä priorioletuksilla $\alpha = \beta = 1$ ja $\alpha = \beta = 0.01$. Riittääkö evidenssi H_0:n hylkäämiseen? Antavatko kaksi lähestymistapaa saman lopputuloksen?

2. Määritä negatiivisen binomijakauman odotusarvo ja varianssi käyttäen hyväksi Poissonin jakauman ja Gamma-jakauman vastaavia tunnuslukuja sekä kaavoja

$$\mathsf{E}(y) = \mathsf{E}[\mathsf{E}(y|\theta)] \quad \text{ja} \quad \mathsf{Var}(y) = \mathsf{E}[\mathsf{Var}(y|\theta)] + \mathsf{Var}[\mathsf{E}(y|\theta)].$$

3. Oletetaan, että havainnot $y = (y_1, ..., y_n)$ ovat jakaumasta $\text{Poi}(\theta)$ ja priorijakauma on $\theta \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$. Osoita, että uuden havainnon posterioriennustejakauma $p(\tilde{y}|y)$ on negatiivinen binomijakauma.

   (Käännä sivua.)

4. Taulukossa 1 on ilmailuliikenteen kuolemaan johtaneet onnettomuudet ja kuolemat 10 vuoden ajalta. Taulukko on tallennettuna kurssisivun hakemiston tiedostossa "Air.csv".

Vuosi	Kuolemaan johtaneet onnettomuudet	Matkustajien kuolemat	Kuolemien esiintyvyys
1976	24	734	0.19
1977	25	516	0.12
1978	31	754	0.15
1979	31	877	0.16
1980	22	814	0.14
1981	21	362	0.06
1982	26	764	0.13
1983	20	809	0.13
1984	16	223	0.03
1985	22	1066	0.15

Taulukko 1: Maailman ilmailukuolemat 1976-85. Kuoleman esiintyvyys on matkustajien kuolemien lkm 100 miljoonaa matkustajamailia kohden. Lähde: Statistical Abstract of the United States.

(a) Oletetaan, että onnettomuuksien määrät kunakin vuonna ovat riippumattomia ja Poisson(θ)-jakautuneita. Aseta parametrin θ priorijakaumaksi sopiva gamma-jakauma ja määritä aineistoon perustuva posteriorijakauma ja 95 % posterioriväli. Anna lisäksi 95 % ennusteväli vuoden 1986 onnettomuuksille. Määritä välit sekä tarkkojen jakaumien kvantiilien avulla että BUGS-simuloinnilla.

(b) Oletetaan, että onnettomuuksien lukumäärät noudattavat riippumattomia Poisson-jakaumia vakioesiintyvyydellä ja altistuminen mitataan lennettyinä 100 miljoonana matkustajamailina. Aseta priorijakauma θ:lle ja määritä aineistoon perustuva posteriorijakauma sekä sille 95% väli. (Estimoi lennetyt matkustajamailit tekemällä jakolasku tiettyjen taulukon sarakkeiden välillä.) Anna 95 % ennusteväli vuoden 1986 onnettomuuksille olettaen, että sinä vuonna lennetään 8×10^{11}matkustajamailia. Määritä välit sekä tarkkojen kvantiilien avulla että BUGS-simuloinnilla. (Huom. luentodioissa tarkasteltiin matkustajien kuolemia, tässä onnettomuuksien lukumäärää!)

(c) Laske Bayesin tekijä B_{10} testattaessa kohdan (a) hypoteesia vs. kohdan (b) hypoteesia. Hylkäisitkö nollahypoteesin saamasi tuloksen perusteella?