

1. Olkoon  $y$  havainto tasajakaumasta  $Tas(0, \theta)$  ja  $\theta$ :n priorijakauman tiheysfunktio olkoon  $p(\theta) = \theta e^{-\theta}$ , kun  $\theta > 0$ .
  - (i) Määritä  $\theta$ :n posteriorijakauma.
  - (ii) Määritä 95% tasahäntäinen (equi-tailed) posterioriväli  $\theta$ :lle, kun  $y = 7$ .
  - (ii) Määritä 95% HPD-väli (suurimman posteritiheyden väli)  $\theta$ :lle, kun  $y = 7$ .
2. Vuonna 2007 Suomessa elävänä syntyneistä 58729 lapsesta poikia oli 30136 ja tyttöjä 28593. Määritä 95% tasahäntäiset posteriorivälit tyttöjen todennäköisyydelle  $\theta$  ja sukupuolisuhteelle  $\phi = (1 - \theta)/\theta$ , kun priorijakauma on tasajakauma.
3. Normaali-jakauma tuntemattomalla odotusarvolla: Poimitaan  $n$  opiskelijan satunnaisotos suuresta populaatiosta ja heidän painonsa mitataan. Keskiarvo on  $\bar{y} = 70$  (kg). Oletetaan, että painot ovat normaalijakautuneita tuntemattomalla odotusarvolla  $\theta$  ja tunnetulla hajonnalla 10 (kg). Oletetaan, että priorijakaumasi  $\theta$ :lle on normaalijakauma odotusarvolla 80 ja hajonnalla 20.
  - (a) Anna  $\theta$ :n posteriorijakauma. (Vastaus on  $n$ :n funktio).
  - (b) Uusi opiskelija poimitaan satunnaisesti. Määritä posterioriennustejakauma hänen painolleen  $\tilde{y}$ .
  - (c) Kun  $n = 10$ , anna 95% posterioriväli  $\theta$ :lle ja 95% posterioriennusteväli  $\tilde{y}$ :lle.
  - (d) Toista (c), kun  $n=100$ .
4. Diskreetti otosavaruus: Oletetaan, että San Fransiscossa on  $N$  johdinautoa, jotka on numeroitu järjestyksessä 1:stä  $N$ :ään. Näet satunnaisesti johdinauton, jonka numero on 204.
  - a) Määritä suurimman uskottavuuden estimaatti parametrille  $N$ .
  - b) Määrittele sopiva priorijakauma ja sitä vastaava posteriorijakauma  $N$ :lle.
  - c) Simuloi posteriorijakaumaa ja uuden havainnon posterioriennustejakaumaa BUGS:lla, piirrä jakaumien histogrammit sekä määritä molemmille jakaumille 95% HPD- ja tasahäntäinen väli.
5. Todista seuraavat hyödylliset yhtälöt:
  - a)  $E(U) = E(E(U|V))$ ,
  - b)  $\text{Var}(U) = E(\text{Var}(U|V)) + \text{Var}(E(U|V))$ .