

1. Oletetaan, että bussi kulkee  $\theta$  minuutin välein. Saavut paikalle satunnaisesti ja joudut odottamaan  $y$  minuuttia. Haluat estimoida parametrin  $\theta$  ja asetat sille priorijakauman

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^2}, & \text{kun } \theta > 1 \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

- a) Määritä  $\theta$ :n posteriorijakauma.
- b) Määritä Bayes-estimaatit parametrille  $\theta$  (moodi, odotusarvo ja mediaani). Laske lisäksi estimaattien arvot, kun  $y = 7$ .
- c) Simuloi posteriorijakaumaa ja määritä estimaatit BUGS:illa, kun  $y = 7$  (Vihje: priorijakauma on erikoistapaus Pareto-jakaumasta).
2. Olkoon  $y = (y_1, \dots, y_n)$  satunnaisotos tasajakaumasta  $\text{Tas}(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$ , missä  $\theta \in (-\infty, \infty)$  on tuntematon.
- a) Muodosta uskottavuusfunktio  $\theta$ :lle. Mikä on suurimman uskottavuuden estimaatti?
- b) Muodosta konjugaattinen priorijakauma.
- c) Määritä posteriorijakauma konjugaattisella priorijakaumalla.
3. Olkoot  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  riippumattomia havaintoja Poisson-jakaumasta, jonka odotusarvo  $\theta$  on tuntematon.
- a) Mikä on  $\theta$ :n uskottavuusfunktio?
- b) Muodosta konjugaattinen priorijakauma. Mistä jakaumasta on kysymys?
- c) Määritä posteriorijakauma konjugaattisella priorijakaumalla.
- d) Mikä on priorijakauman odotusarvo ja varianssi? Entä estimaattorin  $\bar{Y} = \sum Y_i/n$  varianssin prioriodotusarvo  $E[\text{Var}(\bar{Y}|\theta)] = \int_0^\infty p(\theta)\text{Var}(\bar{Y}|\theta)d\theta$ ? Osoita, että posteriorijakauman odotusarvo on priorijakauman odotusarvon ja otoskeskiarvon painotettu keskiarvo, missä painoina ovat priorijakauman varianssin ja  $E[\text{Var}(\bar{Y}|\theta)]$ :n käänteisluvut.
- e) Määritä Jeffreysin priorin  $\theta$ :lle.
4. a) Osoita, että

$$p(y|\theta) = \frac{\theta^2}{\theta + 1}(y + 1)e^{-y\theta}, \quad y > 0,$$

on tiheysfunktio kullakin  $\theta > 0$ .

- b) Satunnaisotanta a-kohdan jakaumasta tuottaa havainnot  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Mikä on uskottavuusfunktio?
- c) Määritä konjugaattinen priorijakauma  $\theta$ :lle (vakiokerrointa lukuun ottamatta).
- d) Määritä  $\theta$ :n posteriorijakauma (vakiokerrointa lukuun ottamatta) käyttäen tätä priorijakaumaa ja vertaa sen muotoa priorijakaumaan.