Luku 9

Otantajakaumat

9.1 Riippumattomat satunnaismuuttujat

Muistamme edellisistä luvuista, että satunnaismuuttujat X_1 ja X_2 ovat riippumattomat (määritelmät 4.6 ja 7.4), jos

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2) \qquad \text{kaikilla } x_1 \in S_1,\ x_2 \in S_2,$$

missä $f(x_1, x_2)$ on X_1:n ja X_2:n yhteisjakauman tiheysfunktio (tai diskreetissä tapauksessa todennäköisyysfunktio), $f_1(x_1)$ on X_1:n ja $f_2(x_2)$ on X_2:n tiheysfunktio, S_1 on X_1:n arvojoukko ja S_2 on X_2:n arvojoukko. Määritelmä yleistyy suoraviivaisesti usean satunnaismuuttujan tapaukseen. Satunnaismuuttujat X_1, X_2, ..., X_n *ovat riippumattomat,* jos

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n)$$

kaikilla $x_i \in S_i$, missä $f_i(x_i)$ on satunnaismuuttujan X_i tiheysfunktio ja S_i on X_i:n arvojoukko $1 \leq i \leq n$. Jos siis satunnaismuuttujat X_i, $1 \leq i \leq n$ ovat riippumattomat, niin yksittäisten satunnaismuuttujien X_i reunajakaumat täysin määrittävät niiden yhteisjakauman. Jos satunnaismuuttujat X_1, X_2, ..., X_n *ovat riippumattomat,* niin myös niiden funktiot $u_1(X_1)$, $u_2(X_2)$, ..., $u_n(X_n)$ ovat riippumattomat, mikäli kukin funktio u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ riippuu vain satunnaismuuttujasta X_i eikä siis satunnaismuuttujista X_j, $j \neq i$.

Esimerkki 9.1 Olkoon X_1 nopan silmäluku, kun heitetään tavallista harhatonta noppaa. Silloin X_1:n arvojoukko on $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ on ja todennäköisyysfunktio

$$f_1(x_1) = \frac{1}{6}, \quad \text{kun } x_1 \in S_1$$

ja $f_1(x_1) = 0$, kun $x_1 \notin S_1$. Olkoon X_2 kruunien lukumäärä, kun heitetään harhatonta lanttia kolme kertaa ja heitot ovat toisistaan riippumattomat. Silloin $X_2 \sim \mathrm{Bin}(3, 1/2)$ ja

$$f_2(x_2) = \binom{3}{x_2}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x_2} = \binom{3}{x_2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3},$$

kun $x_2 \in S_2 = \{0, 1, 2, 3\}$. Nämä kaksi koetta, nopan heitto ja lantin heitto, tehdään siten, että ne ovat toisistaan riippumattonat. Siksi satunnaismuuttujat X_1 ja X_2 ovat toisistaan niippumattomat. Silloin esimerkiksi

$$P(X_1 = 4 \text{ ja } X_2 = 2) = f_1(2)f_2(2) = \frac{1}{6} \cdot \binom{3}{2}(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{16}.$$

Huomaa,että merkinnät $P(X_1 = 4 \text{ ja } X_2 = 2), P(\{X_1 = 4\} \cap \{X_2 = 2\})$ ja $P(X_1 = 4, X_2 = 2)$ tarkoittavat samaa asiaa. Yleisesti

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2) = \frac{1}{6} \cdot \binom{3}{x_2}(\frac{1}{2})^3$$

on satunnaismuuttujien X_1 ja X_2 yhteisjakauman todennäköisyysfunktio, missä $(x_1, x_2) \in S_1 \times S_2$. Olkoon esimerkiksi $A = \{5, 6\} \in S_1$ ja $B = \{0, 1, 2\} \in S_2$. Silloin X_1:n ja X_2:n riippumattomuuden nojalla

$$P(X_1 \in A, X_2 \in B) = P(X_1 \in A)P(X_2 \in B) = \frac{1}{3} \cdot [\sum_{x_2=0}^{2} \binom{3}{x_2}(\frac{1}{2})^3] = \frac{7}{24}.$$

□

Usein tarkastelemme satunnaismuuttujien funktioita. Olkoon esimerkiksi $Y = u(X_1, X_2)$, missä u on satunnaismuuttujien X_1 ja X_2 reaaliarvoinen funktio. Silloin Y on tietysti satunnaismuuttuja. Erityisesti satunnaismuuttujien lineaariset funktiot ovat tärkeitä tilastotieteessä. Esimerkissä 9.1 voitaisiin määritellä satunnaismuuttuja $Y = X_1 + X_2$, jonka arvoalue on $S_Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Satunnaismuuttuja Y on määritelty tulojoukossa $S_1 \times S_2$, missä $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ja $S_2 = \{0, 1, 2, 3\}$.

Riippumattomien satunnaismuuttujien funktion $u(X_1, X_2)$ odotusarvo voidaan laskea kaavalla

$$E[u(X_1, X_2)] = \sum_{x_2 \in S_2} \sum_{x_1 \in S_1} u(x_1, x_2)f_1(x_1)f_2(x_2).$$

Jos satunnaismuuttujan Y todennäköisyysfunktio on $g(y)$, niin silloin

$$E[u(X_1, X_2)] = E(Y) = \sum_{y \in S_Y} yg(y).$$

Jos $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ (X_1 ja X_2 ovat riippumattomat) ja $u(X_1, X_2) = u_1(X_1)u_2(X_2)$, niin

$$E[u_1(X_1)u_2(X_2)] = E[u(X_1)]\, E[u_2(X_2)]$$

(Lause 4.8). Jos satunnaismuuttujilla X_1 ja X_2 on sama jakauma ja $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$, satunnaismuuttujien X_1, X_2 sanotaan olevan *otos* X_1:n ja X_2:n yhteisestä jakaumasta. Jos esimerkiksi heitetään kahta noppaa, meillä on otos X_1, X_2 tasajakumasta $\text{Tasd}(1, 6)$, missä otoskoko $n = 2$.

Satunnaisotos ja otossuure

Tyypillisessä tilastollisessa päättelyongelmassa tarkastelemme satunnaismuuttujaa X, jonka jakauma on tuntematon. Olkoon $f(x)$ satunnaismuuttujan X tiheysfunktio ja $F(x)$ kertymäfunktio (Jos X on diskreetti, niin $f(x)$ on todennäköisyysfunktio). Karkeasti luokitellen voimme sanoa, että

1. $f(x)$ on joko täysin tuntematon tai

2. tunnetaan funktion $f(x)$ matemaattinen muoto, mutta jakauma riippuu yhdestä tai useammasta tuntemattomasta parametrista.

Kun jakauma on parametrin arvoa vaille tunnettu, niin silloin esimerkiksi tiedämme, että

1. X noudattaa binomijakaumaa $\mathrm{Bin}(n, \theta)$, missä θ on tuntematon parametri.

2. X noudattaa normaalijakaumaa $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, missä toinen tai molemmat parametreista ovat tuntemattomia. Jos molemmat ovat tuntemattomia niin parametri $\theta = (\mu, \sigma^2)$ on vektori.

Kun funktio $f(x)$ on täysin tuntematon, oletamme tavallisesti esimerkiksi, että X:n odotusarvo $E(X)$ ja varianssi $\mathrm{Var}(X)$ ovat olemassa.

Määritelmä 9.1 Satunnaismuuttujat X_1, X_2, ..., X_n ovat satunnaisotos X:n jakaumasta, jos ne ovat riippumattomat ja noudattavat samaa jakaumaa (independent, identically distributed, *iid*) kuin X. Otoskoko on n.

Esimerkki 9.2 Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos normaalijakaumasta $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Silloin jokainen $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ja X_1, X_2, ..., X_n ovat riippumattomat. Otoksen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yhteisjakauman tiheysfunktio on siis

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \mu, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \mu, \sigma^2) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-[1/(2\sigma^2)](x_i-\mu)^2} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-[1/(2\sigma^2)]\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2},
\end{aligned}
$$

missä

$$
f(x_i; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-(x_i-\mu)^2/2\sigma^2}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n
$$

on normaalijakauman $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ tiheysfunktio. $\square$

Lause 9.1 (Apulauseen 7.1 yleistys) *Satunnaisvektorit* $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *ja* $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ *ovat riippumattomat jos ja vain jos on olemassa sellaiset funktiot* $g(\boldsymbol{X})$ *ja* $h(\boldsymbol{Y})$, *että*

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{y})$$

kaikilla $\boldsymbol{x}$*:n ja* $\boldsymbol{y}$*:n arvoilla, missä* g *ei riipu* $\boldsymbol{y}$*:stä ja* h *ei riipu* $\boldsymbol{x}$*:stä.*

Otoksen *tunnusluku* (otossuure) Y on otoksen funktio eli $Y = u(X_1, \ldots, X_n)$. Tilastollisessa päättelyssä tuntematonta parametria θ arvioidaan eli estimoidaan jonkin otoksen tunnusluvun Y avulla. Siinä tapauksessa sanomme tunnuslukua Y parametrin θ *piste-estimaattoriksi.*

9.2 Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Tilastollisissa sovelluksissa tarkastellaan tavallisesti erilaisia satunnaismuuttujien funktioita. Otoksesta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ laskettu suure $u(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ on otoksen *tunnusluku* (*statistics*). Kaksi tärkeää otoksen tunnuslukua ovat otoskeskiarvo $\overline{X}$ ja otosvarianssi S^2. Niistä voidaan muodostaa vektoriarvoinen tunnusluku $(\overline{X}, S^2)$. Jostain tietystä otoksesta $x_1, x_2, \ldots, x_n$ voidaan laskea tunnusluvuille määrätyt arvot ($\overline{x}$ ja s^2). Nämä arvot ovat vain yksi havainto vastaavista satunnaismuuttujista ($\overline{X}$ ja S^2). Tilastollisessa päättelyssä tarvitaan näiden otoksesta laskettujen tunnuslukujen jakaumia. Tämä osa tilastollista päättelyä on (tunnuslukujen) otantajakaumien teoriaa.

Esimerkki 9.3 Heitetään kahta noppaa. Olkoon 1. nopan silmäluku X_1 ja 2. nopan silmäluku X_2. Määritetään nyt silmälukujen summan $Y = X_1 + X_2$ todennäköisyysfunktio $g(y)$. Tarkastellaan ensin yksittäisen arvon, esimerkiksi $y = 4$, todennäköisyyden $g(4)$ laskemista. Tapahtuma $\{Y = 4\}$ voi sattua kolmella toisensa poissulkevalla tavalla: $\{X_1 = 1,\ X_2 = 3\}$, $\{X_1 = 2,\ X_2 = 2\}$ ja $\{X_1 = 3,\ X_2 = 1\}$. Siksi

$$\begin{aligned} g(4) &= P(Y = 4) \\ &= P(X_1 = 1,\ X_2 = 3) + P(X_1 = 2,\ X_2 = 2) + P(X_1 = 3,\ X_2 = 1) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{36}. \end{aligned}$$

Jatkamalla samalla periaatteella saadaan todennäköisyysfunktio $g(y)$:

y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$g(y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

□

Yleisesti Esimerkin 9.3 todennäköisyydet voidaan laskea ns. *konvoluutiokaavalla*

$$g(y) = P(Y = y) = \sum_{k=1}^{y-1} f(k)f(y-k),$$

missä

$$f(k) = \frac{1}{6}, \qquad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

on nopan silmäluvun todennäköisyysfunktio.

Toinen tapa johtaa $g(y)$, on käyttää momenttifunktiota. Nopan silmäluvun momenttifunktio on

$$M_X(t) = E\big(\mathrm{e}^{tX}\big) = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{t} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{3t} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{4t} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{5t} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{6t}.$$

Koska silmäluvut ovat riippumattomat, niin Y:n momenttifunktio on

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) = [M_X(t)]^2.$$

Koska e^{kt}:n kerroin $M_Y(t)$:n lausekkeessa on todennäköisyys $P(Y = k)$, $k = 2, 3, \ldots, 12$, ne muodostavat Y:n todennäköisyysfunktion.

Lause 9.2 *Olkoot $X_1, X_2, \ldots, X_n$ riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden yhteisjakauman tiheysfunktio on $f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n)$. Jos $g(y)$ on satunnaismuuttujan $Y = u(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tiheysfunktio, niin*

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{S_y} y g(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_S\int_S\cdots\int_S u(x_1, x_2, \ldots, x_n) f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ldots\,\mathrm{d}x_n, \end{aligned}$$

mikäli odotusarvo on olemassa. Diskreettejä satunnaismuuttujia koskeva vastaava tulos saadaan korvaamalla integraalit summalausekkeilla.

Seuraava lause on Lauseen 9.2 erikoistapaus

Lause 9.3 *Olkoot $X_1, X_2, \ldots, X_n$ riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden yhteisjakauman tiheysfunktio on $f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n)$. Jos $Y = u_1(X_1)u_2(X_2)\cdots u_n(X_n)$, niin*

$$E(Y) = E[u_1(X_1)]\,E[u_2(X_2)]\cdots E[u_n(X_n)].$$

Jos $Y = X_1 + \cdots + X_n$ on riippumattomien satunnaismuuttujien summa, niin edellä esitettyjen lauseiden avulla voidaan laskea Y:n odotusarvo, varianssi ja momenttifunktio.

Seuraavassa tarkastellaan riippumattomien satunnaismuuttujien lineaarisia yhdisteitä (lineaarikombinaatioita).

Lause 9.4 *Olkoot riippumattomien satunnaismuuttujien X_1, X_2, ..., X_n odotusarvot μ_1, μ_2, ..., μ_n ja varianssit σ_1^2, σ_2^2, ..., σ_n^2. Silloin satunnaismuuttujan $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ odotusarvo ja varianssi ovat*

$$\mu_Y = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i \qquad ja \qquad \sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2,$$

missä a_1, a_2, ..., a_n ovat annettuja vakioita.

Todistus. Koska odotusarvo on lineaarinen operaattori, niin

$$\begin{aligned} E(Y) &= E\Big(\sum_{i=1}^n a_i X_i\Big) = \sum_{i=1}^n E(a_i X_i) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i\, E(X_i) = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i = \mu_Y. \end{aligned}$$

Vastaavasti

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= E[(Y-\mu_Y)^2] = E\bigg[\Big(\sum_{i=1}^n a_i X_i - \sum_{i=1}^n a_i \mu_i\Big)^2\bigg] \\ &= E\Big[\sum_{i=1}^n a_i (X_i - \mu_i)\Big]^2 = E\Big[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j (X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\Big] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j\, E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \sigma_{ij}, \end{aligned}$$

missä suureet

$$\sigma_{ij} = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)]$$

ovat satunnaismuuttujien X_i ja $X_j, 1 \le i \le n, 1 \le j \le n$ välisiä kovariansseja. Koska X_i ja X_j ovat riippumattomat, niin $\sigma_{ij} = 0$, kun $i \neq j$. Tästä seuraa, että

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2.$$

□

Esimerkki 9.4 Olkoot X_1 ja X_2 riippumattomat satunnaismuuttujat, joiden odotusarvot ovat $\mu_1 = -4$ ja $\mu_2 = 3$ sekä varianssit vastaavasti $\sigma_1^2 = 4$ ja $\sigma_2^2 = 9$. Silloin satunnaismuuttujan $Y = 3X_1 - 2X_2$ odotusarvo ja varianssi ovat

$$\mu_Y = 3 \cdot (-4) + (-2) \cdot 3 = -18$$

ja

$$\sigma_Y^2 = 3^2 \cdot 4 + (-2)^2 \cdot 9 = 72.$$

□

Esimerkki 9.5 Olkoon $X_1, X_2, \dots, X_n$ otos jakaumasta, jonka odotusarvo on μ ja varianssi σ^2. Silloin otoskeskiarvon

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

odotusarvo ja varianssi ovat

$$\mu_{\overline{X}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right) \mu = \mu \qquad \text{ja} \qquad \sigma^2_{\overline{X}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Otosvarianssi on muotoa

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1} \Big(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2 \Big),$$

joten

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1} \Big[\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - n\, E(\overline{X}^2) \Big].$$

Koska $E(X_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$ ja $E(\overline{X}^2) = \sigma^2/n + \mu^2$, niin laskemalla on helppo todeta, että $E(S^2) = \sigma^2$. Olemme siis osoittaneet, että $\overline{X}$ on μ:n ja S^2 on σ^2:n harhaton estimaattori. □

Jos riippumattomien satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \dots, X_n$ jakaumat tunnetaan, seuraavan lauseen avulla voidaan määrittää niiden lineaarisen yhdisteen momenttifunktio, jonka avulla saadaan usein myös sen jakauma.

Lause 9.5 *Jos X_1, X_2, …, X_n ovat riippumattomat satunnaismuuttujat, joiden momenttifunktiot ovat $M_{X_i}(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, niin satunnaismuuttujan $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ momenttifunktio on*

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(a_i t).$$

Todistus. Satunnaismuuttujan Y momenttifunktio on

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E\big(\mathrm{e}^{tY}\big) = E\big(\mathrm{e}^{t(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n)}\big) \\ &= E\big(\mathrm{e}^{a_1tX_1} \cdot \mathrm{e}^{a_2tX_2} \cdots \mathrm{e}^{a_ntX_n}\big) \\ &= E\big(\mathrm{e}^{a_1tX_1}\big)\, E\big(\mathrm{e}^{a_2tX_2}\big) \cdots E\big(\mathrm{e}^{a_ntX_n}\big), \end{aligned}$$

koska satunnaismuuttujat $\mathrm{e}^{a_itX_i}$ ovat keskenään riippumattomat. Momenttifunktion määritelmän mukaan

$$E\big(\mathrm{e}^{tX_i}\big) = M_{X_i}(t),$$

joten

$$E\big(\mathrm{e}^{a_itX_i}\big) = M_{X_i}(a_i t).$$

Siksi

$$M_Y(t) = M_{X_1}(a_1t)M_{X_2}(a_2t)\cdots M_{X_n}(a_nt) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(a_it).$$

□

Esimerkki 9.6 Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos Bernoullin jakaumasta $\mathrm{Ber}\big(\frac{1}{3}\big)$. Silloin

$$M(t) = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^t.$$

Jos $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, niin

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n}\big(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^t\big) = \big(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^t\big)^n.$$

Tästä näemme, että $Y \sim \mathrm{Bin}\big(n, \frac{1}{3}\big)$. □

Seuraus 9.1 *Jos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ on otos jakaumasta, jonka momenttifunktio on $M(t)$, niin*

1. *satunnaismuuttujan $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ momenttifunktio on*

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} M(t) = [M(t)]^n.$$

2. *otoskeskiarvon $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n}(1/n)X_i$ momenttifunktio on*

$$M_{\overline{X}}(t) = \prod_{i=1}^{n} M\left(\frac{t}{n}\right) = \left[M\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n.$$

Esimerkki 9.7 Olkoon X_1, X_2, X_3 otos eksponenttijakaumasta, jonka odotusarvo on θ. Eksponenttijakauman momenttifunktio on $M(t) = 1/(1-\theta t)$, $t < 1/\theta$. Silloin summan $Y = X_1 + X_2 + X_3$ momenttifunktio on

$$M_Y(t) = [1/(1-\theta t)]^3 = (1-\theta t)^{-3}, \qquad t < \frac{1}{\theta},$$

mikä on gammajakauman $\mathrm{Gamma}(3, \theta)$ momenttifunktio, joten $Y \sim \mathrm{Gamma}(3, \theta)$. Toisaalta $\overline{X}$:n momenttifunktio on

$$M_{\overline{X}}(t) = \left[\left(1 - \frac{\theta t}{3}\right)^{-1}\right]^3 = \left(1 - \frac{\theta t}{3}\right)^{-3}, \qquad \text{kun } t < \frac{3}{t}.$$

Otoskeskiarvo $\overline{X}$ noudattaa siis gammajakaumaa $\mathrm{Gamma}(3, \theta/3)$. □

9.3 Normaalijakaumaan liittyvät jakaumat

Tilastollisissa sovelluksissa oletetaan usein, että otos tehdään normaalijakaumasta $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Estimoitavina parametreina ovat silloin μ ja σ^2. Niiden tavallisimmat estimattorit ovat otoskeskiarvo $\overline{X}$ ja otosvarianssi S^2.

9.3.1 Summan ja neliösumman jakauma

Lause 9.6 *Jos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ on otos normaalijakaumasta $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, niin otoskeskiarvon $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ jakauma on $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$.*

Todistus. Koska $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, niin

$$M_{X_i}(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

Seurauslauseen 9.1 mukaan

$$\begin{aligned} M_{\overline{X}}(t) &= M_{X_i}(\frac{t}{n}) \\ &= \left[\exp\left(\mu \cdot \frac{t}{n} + \frac{\sigma^2 (t/n)^2}{2}\right)\right]^n \\ &= \exp\left(\mu t + \frac{(\sigma^2/n) t^2}{2}\right), \end{aligned}$$

joka on normaalijakauman $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$ momenttifunktio. Koska momenttifunktio määrittää yksikäsitteisesti satunnaismuuttujan jakauman, niin $\overline{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$. □

Ennen otosvarianssin S^2 tai satunnaismuuttujan $(n-1)S^2/\sigma^2$ jakauman johtamista esitetään kaksi valmistelevaa tulosta.

Lause 9.7 *Olkoot $X_i \sim \chi^2(r_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Jos X_1, X_2, $\ldots$, X_n ovat riippumattomat, niin satunnaismuuttujan $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ jakauma on $\chi^2(r_1 + r_2 + \cdots + r_k)$.*

Todistus. Satunnaismuuttujan Y momenttifunktio voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E\left[\mathrm{e}^{t(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)}\right] \\ &= E\left(\mathrm{e}^{tX_1}\right) \cdot E\left(\mathrm{e}^{tX_2}\right) \cdots E\left(\mathrm{e}^{tX_n}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t). \end{aligned}$$

Koska

$$M_{X_i}(t) = (1 - 2t)^{-r_i/2}; \qquad t < \frac{1}{2},$$

niin

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} (1-2t)^{-r_i/2} = (1-2t)^{-(r_1+r_2+\cdots+r_n)/2}, \qquad t < \frac{1}{2}$$

on χ^2-jakauman $\chi^2(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)$ momenttifunktio. Tästä seuraa, että $Y \sim \chi^2(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)$. □

Lause 9.8 *Olkoon $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ otos standardimuotoisesta normaalijakaumasta* $\mathrm{N}(0,1)$. *Silloin $W = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2$ noudattaa jakaumaa $\chi^2(n)$.*

Todistus. Koska $Z_i^2 \sim \chi^2(1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ja Z_1^2, Z_2^2, …, Z_n^2 ovat keskenään riippumattomat, niin tulos seuraa Lauseesta 9.7. □

Seuraus 9.2 *Olkoot X_1, X_2, …, X_n riippumattomat ja $X_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Silloin satunnaismuuttuja*

$$W = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}$$

noudattaa jakaumaa $\chi^2(n)$.

9.3.2 t-jakauma ja F-jakauma

Seuraavassa lauseessa esitetään otoskeskiarvoa $\overline{X}$ ja otosvarianssia S^2 koskeva tulos, joka on tärkeä tilastollisissa sovelluksissa.

Lause 9.9 (Studentin lause) *Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos normaalijakaumasta* $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} (1/n) X_i$ *on otoskeskiarvo ja* $S^2 = [1/(n-1)] \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$ *on otosvarianssi. Silloin*

1. *$\overline{X}$ ja S^2 ovat riippumattomat satunnaismuuttujat,*

2. *$\overline{X}$ noudattaa normaalijakaumaa* $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$,

3. *$(n-1)S^2/\sigma^2$ noudattaa χ^2-jakaumaa $\chi^2(n-1)$.*

Todistus. Kohta 1. Huomataan ensin, että satunnaismuuttujat $\overline{X}$ ja $X_1 - \overline{X}, \ldots, X_n - \overline{X}$ noudattavat normaalijakaumaa. Laskemalla voidaan todeta, että $\mathrm{Cov}(\overline{X}, X_i - \overline{X}) = 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Tästä seuraa (miksi?), että $\overline{X}$ ja $X_1 - \overline{X}, \ldots, X_n - \overline{X}$ ovat riippumattomat. Koska S^2 riippuu pelkästään satunnaismuuttujista $X_1 - \overline{X}, \ldots, X_n - \overline{X}$, niin myös $\overline{X}$ ja S^2 ovat riippumattomat. Kohta 2 on lause 9.6.

Todistetaan nyt kohdan 3 väite.

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

Laskemalla voidaan todeta, että

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(X_i-\overline{X})+(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\right]^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2+\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2}\\ &= \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}+\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2.\end{aligned}$$

Koska $Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim \mathrm{N}(0,1)$, niin $Z^2\sim\chi^2(1)$. Vastaavasti Seurauslauseen 9.2 mukaan $W=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$.

Koska S^2 ja Z^2 ovat kohdan 1 mukaan riippumattomat, niin

$$\begin{aligned}E\left(\mathrm{e}^{tW}\right) &= E\left(\mathrm{e}^{t[(n-1)S^2/\sigma^2+Z^2]}\right)=E\left(\mathrm{e}^{t(n-1)S^2/\sigma^2}\cdot\mathrm{e}^{tZ^2}\right)\\ &= E\left(\mathrm{e}^{t(n-1)S^2/\sigma^2}\right)E\left(\mathrm{e}^{tZ^2}\right).\end{aligned}$$

Koska $W\sim\chi^2(n)$ ja $Z^2\sim\mathrm{N}(0,1)$, niin

$$(1-2t)^{-n/2}=E\left[\mathrm{e}^{t(n-1)S/\sigma^2}\right]\cdot(1-2t)^{-1/2}.$$

Tästä seuraa, että

$$E\left[\mathrm{e}^{t(n-1)S/\sigma^2}\right]=(1-2t)^{-(n-1)/2};\qquad t<\frac{1}{2},$$

joka on jakauman $\chi^2(n-1)$ momenttifunktio. Näin on lauseen väite 3 todistettu. □

Lause 9.9 osoittaa, että yksi vapausaste menetetään, kun lausekkeessa $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ population keskiarvo μ korvataan otoskeskiarvolla. Jatkossa tulemme näkemään χ2-jakauman keskeisen merkityksen sovelluksissa.

Lause 9.10 *Olkoot X_1, X_2, …, X_n keskenään riippumattomat normaalijakaumaa noudattavat satunnaismuuttujat, joiden odotusarvot ovat μ_1, μ_2, …, μ_n ja varianssit σ_1^2, σ_2^2, …, σ_n^2. Silloin lineaarikombinaatio*

$$Y=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$$

noudattaa normaalijakaumaa

$$\mathrm{N}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\mu_i,\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2\right).$$

Todistus. Tulos saadaan soveltamalla Lausetta 9.5 normaalijakaumaan. □

Oletetaan, että $X_1, X_2, \ldots, X_n$ on otos jakaumasta $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, jonka varianssi σ^2 tunnetaan. Tarkastellaan lauseketta

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)}},$$

joka tunnetaan t-testisuureena. Tiedämme, että

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

ja Lauseen 9.9 mukaan

$$U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

Lisäksi Lauseen 9.9 mukaan Z ja U ovat riippumattomat. Tällainen satunnaismuuttuja noudattaa t-jakaumaa vapausastein $r = n-1$. Alaluvussa 7.6.2 esitettiin t-jakauman tiheysfunktio.

Usein halutaan verrata kahden normaalijakauman $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ ja $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ variansseja. Teemme n_1:n kokoisen otoksen jakaumasta $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ ja n_2:n kokoisen otoksen jakaumasta $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Oletetaan, että otokset ovat toisistaan riippumattomat. Olkoot S_1^2 ja S_2^2 näistä eri otoksista lasketut otosvarianssit. Lauseen 9.9 mukaan

$$U = (n_1 - 1)\frac{S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1 - 1) \qquad \text{ja} \qquad V = (n_2 - 1)\frac{S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2 - 1).$$

Koska otokset ovat keskenään riippumattomat, niin satunnaismuuttujat U ja V ovat riippumattomat. Varianssien yhtäsuuruutta voidaan testatata tarkastelemalla suhdetta

$$F = \frac{U/(n_1 - 1)}{V/(n_2 - 1)}. \tag{9.3.1}$$

Alaluvussa 7.6.2 osoitettiin, että suhde (9.3.1) noudattaa F-jakaumaa vapausastein $n_1 - 1$ ja $n_2 - 2$.

9.4 Keskeinen rajaväittämä

Olemme havainneet, että otossuureen jakauma riippuu tavallisesti otoskoosta n. Jos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ on otos Bernoullin jakaumasta $\mathrm{Ber}(p)$, niin $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. Satunnaismuuttujan X jakauma riippuu siis otoskoosta n. Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos jakumasta, jonka keskiarvo on μ ja varianssi $\sigma^2 > 0$. Merkitään satunnaismuuttujien X_1, X_2, $\ldots$, X_n summaa ja keskiarvoa seuraavasti:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{ja} \qquad \overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$$

Silloin

$$E(\overline{X}_n) = \mu \qquad \text{ja} \qquad \mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Satunnaismuuttujan $\overline{X}_n$ varianssi pienenee, kun n kasvaa. Jokaista n:ää kohti saadaa eri jakauma. Tarkastelemme satunnaismuuttujien $(\overline{X}_i; i \geq 1) = \overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3, \ldots$ jonoa ja näiden satunnaismuuttujien jakaumien jonoa.

Jos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ on otos normaalijakaumasta $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, niin otoskeskiarvon $\overline{X}_n$ jakauma on $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$, joka riippuu n:stä. Otoskoon n kasvaessa todennäköisyysmassa keskittyy yhä pienemmälle ja pienemmälle välille μ:n ympäristöön. Tämä tarkoittaa, että $\overline{X}_n$:n jakauma lähenee todennäköisyyden mielessä keskiarvoa μ. Vastaavasti $\overline{X}_n - \mu$ lähenee nollaa todennäköisyyden mielessä.

Olkoon yleisesti

$$W_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Silloin $E(W_n) = 0$ ja $\mathrm{Var}(W_n) = 1$. Näillä satunnaismuuttujilla $W_1, W_2, \ldots$ on sama varianssi 1 kaikilla n:n arvoilla. Läheneekö W_n:n jakauma jotain jakaumaa, kun n kasvaa. Jos otos on normaalijakaumasta $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, niin $W_n \sim \mathrm{N}(0, 1)$ kaikilla $n \geq 1$. Täten rajajakauma on tässä tapauksessa $\mathrm{N}(0, 1)$. Jos raja-jakauma ei riipu siitä jakaumasta, josta otos valitaan, niin raja-jakauman täytyy olla $\mathrm{N}(0, 1)$.

Momenttifunktioiden yhteydessä esitettiin momenttifunktion ja ja jakauman (kertymäfunktion) yksikäsitteistä vastaavuutta koskeva Lause 4.10. Samassa yhteydessä esitettiin myös momenttifunktioiden suppenemista koskeva Lause 4.13, jota voidaan soveltaa raja-jakaumien määrittämiseen.

Lause 9.11 (Keskeinen rajaväittämä) *Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos jakaumasta, jonka keskiarvo on μ ja varianssi σ^2. Merkitään*

$$W_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}.$$

Silloin W_n:n jakauma lähenee normaalijakaumaa $\mathrm{N}(0, 1)$, kun $n \to \infty$.

Keskeisen rajaväittämän mukaan riippumattomien satunnaismuuttujien summa noudattaa likimain normaalijakaumaa, kun n on suuri. Merkitsemme

$$W_n \simeq \mathrm{N}(0, 1),$$

kun n on suuri. Merkki $\simeq$ tarkoittaa ”noudattaa likimain jakaumaa”. Käytännössä keskeisen rajaväittämän avulla voidaan arvioida W_n:n jakaumaa, kun n on riittävän suuri. Silloin

$$P(W_n \leq w) \approx \int\limits_{-\infty}^{w} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-w^2/2}\, \mathrm{d}x = \Phi(w),$$

missä $\Phi(w)$ on normitetun normaalijakauman kertymäfunktio. Voimme merkitä saman asian myös seuraavasti:

$$P(W_n \leq w) = F_{W_n}(w) \to \Phi(w),$$

kun $n \to \infty$. Satunnaismuuttujan W_n kertymäfunktio $F_{W_n}(w)$ suppenee kohti normaalijakauman kertymäfunktiota $\Phi(w)$ kaikissa pisteissä $w \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 9.8 Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_{15}$ otos jakaumasta, jonka tiheysfunktio on $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)x^2$, $-1 < x < 1$. Jakauman odotusarvo $\mu = 0$ ja varianssi $\sigma^2 = 3/5$. Esimerkiksi todennäköisyys $P(\overline{X} \leq 0.15)$ voidaan laskea johtamalla ensin $\overline{X}$:n jakauma ja määrittämällä siitä kysytty todennäköisyys. Keskeisen rajaväittämän avulla saadaan tämän todennäköisyyden likiarvo ilman tietoa $\overline{X}$:n tarkasta jakaumasta:

$$\begin{aligned} P(\overline{X} \leq 0.15) &= P\left(\frac{\overline{X} - 0}{\sqrt{3/5}\,/\sqrt{15}} \leq \frac{0.15 - 0}{\sqrt{3/5}\,/\sqrt{15}}\right) \\ &= P(Z_{15} \leq 0.75) \\ &\approx \Phi(0.75) = 0.7734. \end{aligned}$$

Arvion tarkkuudesta keskeinen rajaväittämä ei kuitenkaan anna käsitystä. □

9.4.1 Diskreettien jakaumien likiarvot normaalijakauman avulla

Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos Bernoullin jakaumasta $\mathrm{Ber}(p)$. Silloin $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ noudattaa binomijakaumaa $\mathrm{Bin}(n, p)$. Keskeisen rajaväittämän mukaan

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

noudattaa likimain normaalijakaumaa $\mathrm{N}(0, 1)$, kun n on suuri. Tuloksen mukaan binomijakauma lähenee normaalijakaumaa, kun n kasvaa. Peukalosääntönä voidaan pitää, että n on riittävän suuri, kun $np \geq 5$ ja $n(1-p) \geq 5$. Mitä enemmän p poikkeaa 0.5:stä, sitä suurempi n tarvitaan.

Jos esimerkiksi satunnaismuuttujan $S_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ arvojen todennäköisyyttä arvioidaan normaalijakauman avulla, käytetään jatkuvuuskorjausta. Ajattelemme, että todennäköisyys

$$P(S_n = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}, \; x = 0, 1, \ldots, n,$$

on sen suorakaiteen pinta-ala, jonka kanta on 1 ja kannan keskipiste x. Lasketaan sitten normalijakaumasta todennäköisyys, että satunnaismuuttujan arvo sattuu välille $(x - 1/2, x + 1/2)$. Jakauman keskiarvo ja varianssi määritettään arvioitavasta binomijakaumasta.

Esimerkki 9.9 Oletetaan, että $X \sim \mathrm{Bin}(10, 0.5)$. Lasketaan todennäköisyys $P(3 \leq X < 6)$. Voidaan kirjoittaa

$$P(3 \leq X < 6) = P(2.5 \leq X \leq 5.5).$$

Arvioidaan nyt jälkimmäistä todennäköisyyttä keskeisen rajaväittämän nojalla normaalijakauman avulla. Silloin

$$\begin{aligned} P(2.5 \leq X \leq 5.5) &= P\left(\frac{2.5-5}{\sqrt{10/4}} \leq \frac{X-5}{\sqrt{10/4}} \leq \frac{5.5-5}{\sqrt{10/4}}\right) \\ &\approx \Phi(0.316) - \Phi(-1.581) = 0.5670. \end{aligned}$$

Tarkka todennäköisyys binomijakauman avulla on $P(3 \leq X < 6) = 0.5683$. $\square$

9.4.2 Momenttifunktion rajafunktiot

Tarkastelemme nyt satunnaismuuttujan (usein otoksen tunnusluku) jakauman riippuvuutta otoskoosta n. Otoskeskiarvo ja otosvarianssi ovat tavallisimmat otoksesta lasketut tunnusluvut. Oletetaan esimerkiksi, että $X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. Eri n:n arvoilla saamme eri binomijakauman. Miten jakauma muuttuu n:n kasvaessa? Olemme keskeisen rajaväittämän avulla jo osoittaneet, että $\mathrm{Bin}(n, p)$ lähenee normaalijakaumaa, kun n kasvaa.

Voimme tutkia $\mathrm{Bin}(n, p)$:n rajajakaumaa myös ehdolla, että jakauman odotusarvo np pidetään vakiona λ. Jos $np = \lambda$ on vakio ja $n \to \infty$, niin $p \to 0$. Satunnaismuuttujan $X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ momenttifunktio on

$$M_n(t) = (1 - p + p\mathrm{e}^t)^n.$$

Koska $p = \lambda/n$, niin

$$M_n(t) = \left[1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}\mathrm{e}^t\right]^n = \left[1 + \frac{\lambda(\mathrm{e}^t - 1)}{n}\right]^n.$$

Käyttäen hyväksi analyysin tulosta

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a,$$

saadaan

$$\lim_{n\to\infty} M_n(t) = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^t - 1)} = M(t),$$

joka on olemassa kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Koska

$$M(t) = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^t - 1)}$$

on Poissonin jakauman $\mathrm{Poi}(\lambda)$ momenttifunktio, niin Lauseen 4.13 mukaan X_n:n jakauma lähestyy siis Poissonin jakaumaa $\mathrm{Poi}(\lambda)$, kun $n \to \infty$.

Lause 9.12 (Lévyn jatkuvuuslause) *Olkoon* $X_1, X_2, \ldots$ *jono satunnaismuuttujia, joiden kertymäfunktiot ovat* $F_{X_1}, F_{X_2}, \ldots$ *ja vastaavasti momenttifunktiot* $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), \ldots$. *Olkoon* X *satunnaismuuttuja, jonka kertymäfunktio on* F_X *ja momenttifunktio* $M_X(t)$. *Jos n:n kasvaessa rajatta*

$$M_{X_n}(t) \to M_X(t)$$

kaikilla t:n arvoilla jossain nollan ympäristössä $(-h, h)$, $h > 0$, *niin silloin*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

kaikissa pisteissä x, *joissa* $F_X(x)$ *on jatkuva.*

Satunnaismuuttujien momenttifunktioiden suppenemisesta seuraa siis satunnaismuuttujien kertymäfunktioiden suppeneminen. Tällöin sanomme, että satunnaismuuttujat $X_1, X_2, \ldots$ suppenevat jakaumamielessä kohti satunnaismuuttujaa X.

Keskeisen rajaväittämän todistus

Oletetaan, että $X_1, \ldots, X_n$ on otos jakaumasta, jonka keskiarvo on μ ja varianssi σ^2. Keskeisen rajaväittämän mukaan satunnaismuuttujan $W_n = (\sum_{i=1}^n X_i - n\mu)/\sqrt{n}\sigma$ jamauma lähenee normaalijakaumaa $\mathrm{N}(0,1)$, kun $n \to \infty$. Kirjoitetaan

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{(X_1 - \mu) + \cdots + (X_n - \mu)}{\sqrt{n}\sigma} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}\sigma}(Y_1 + \cdots + Y_n), \end{aligned}$$

missä $Y_i = X_i - \mu$, $i = 1, \ldots, n$ ja $Y_i \perp\!\!\!\perp Y_j$, kun $i \neq j$. Määritelmän mukaan W_n:n momenttifunktio on

$$\begin{aligned} M_{W_n}(t) &= E(e^{tW_n}) = E(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1+\cdots+Y_n)t)} \\ &= M_{Y_1+\cdots+Y_n}(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}). \end{aligned}$$

Koska $Y_i \perp\!\!\!\perp Y_j$, kun $i \neq j$, niin

$$\begin{aligned} M_{W_n}(t) &= M_{Y_1+\cdots+Y_n}(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}) \\ &= \prod_{i=1}^n M_{Y_i}(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}) = [M(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma})]^n, \end{aligned} \tag{9.4.1}$$

missä $M(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma})$ on satunnaismuuttujien Y_i yhteisen jakauman momenttifunktio. Nyt riittää osoittaa, että $M_{W_n}(t) \to e^{\frac{t^2}{2}}$, missä $e^{\frac{t^2}{2}}$ on normaalijakauman $\mathrm{N}(0,1)$ momenttifunktio. Silloin Lévyn jatkuvuuslauseen nojalla (Lause

9.12) satunnaismuuttujien W_n kertymäfunktio F_{W_n} lähenee normaalijakauman N$(0,1)$ kertymäfunktiota Φ.

Kun merkitään $h = \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$, voidaan kirjoittaa $n = \frac{t^2}{\sigma^2 h^2}$. Silloin yhtälöstä (9.4.1) seuraa identiteetti

$$\begin{aligned}\log M_{W_n}(t) &= n \log M(h) \\ &= \frac{t^2}{\sigma^2 h^2} \log M(h) = \frac{t^2}{\sigma^2} \frac{\log M(h)}{h^2}.\end{aligned}$$

Kun t on kiinnitetty ja $n \to \infty$, niin $h \to 0$. Voidaan osoittaa analyysin kurssilta tutun L'Hospitalin säännön avulla, että

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log M(h)}{h^2} = \frac{\sigma^2}{2}. \tag{9.4.2}$$

Kun huomataan, että $M(0) = 1$, $M'(0) = 0$ ja $M''(0) = \sigma^2$ ja sovelletaan L'Hospitalin sääntöä kaksi kertaa, saadaa tulos (9.4.2). Näin siis

$$\lim_{n\to\infty} \log M_{W_n}(t) = \frac{t^2}{\sigma^2}\frac{\sigma^2}{2},$$

joten $\lim_{n\to\infty} M_{W_n}(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.

Esimerkki 9.10 Olkoon X, Y otos tasajakumasta Tas$(0,1)$. Silloin summa $Z = X + Y$ noudattaa kolmiojakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f_Z(z) = \begin{cases} z, & 0 \le z \le 1; \\ 2 - z, & 1 < 1 \le 2; \\ 0, & \text{muualla.} \end{cases}$$

Tiheysfunktio saadaan soveltamalla konvoluutiokaavaa

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) d\,y.$$

Silloin

$$f_Z(z) = \int_0^z d\,y = z,$$

kun $0 \le z \le 1$ ja

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^1 d\,y = 2 - z,$$

kun $1 < z \le 2$. Kolmiojakauma on jo paljon "lähempänä"normaalijakaumaa kuin tasajakauma. $\square$

9.5 Järjestyssuureet

Otoksen suurin ja pienin arvo sekä keskimääräinen arvo, mediaani, ovat tärkeitä otossuureiden arvojen järjestykseen perustuvia tunnuslukuja. Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos. Merkitään otoksen pienintä arvoa $X_{(1)}$ seuraavaksi pienintä $X_{(2)}$ ja niin edelleen, joten

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}.$$

Tämä indeksointi tarkoittaa sitä, että otosarvot pannaan kasvavaan järjestykseen. Jos otos on esimerkiksi 5.0, 3.1, 2.7, 6.1, 5.3, niin järjestetty otos on 2.7, 3.1, 5.0, 5.3, 6.1. Nyt siis esimerkiksi $X_1 = 5.0$, $X_{(1)} = 2.7$ ja $X_{(3)} = 5.0$ on mediaani ja $X_3 = 2.7$. Nyt siis

$$X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$$

ja

$$X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n).$$

Tunnusluku $X_{(k)}$ on otoksen k. järjestystunnusluku.

9.5.1 Maksimi ja minimi

Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos jakaumasta, jonka kertymäfunktio on $F(x)$. Maksimin kertymäfunktio on

$$\begin{aligned} F_{(n)}(x) &= P(X_{(n)} \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x,\ X_2 \leq x,\ \ldots,\ X_n \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) \cdots P(X_n \leq x), \end{aligned}$$

koska X_1, X_2, $\ldots$, X_n ovat riippumattomat. Kertymäfunktion määritelmän mukaan $P(X_i \leq x) = F(x)$, joten

$$F_{(n)}(x) = [F(x)]^n.$$

Minimin kertymäfunktio on

$$\begin{aligned} F_{(1)}(x) &= P(X_{(1)} \leq x) \\ &= 1 - P(X_{(1)} > x) \\ &= 1 - P(X_1 > x,\ X_2 > x,\ \ldots,\ X_n > x) \\ &= 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x) \cdots P(X_n > x) \\ &= 1 - [1 - F(x)]^n. \end{aligned}$$

Esimerkki 9.11 Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos eksponenttijakaumasta $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Määritetään minimin $X_{(1)}$ jakauma. Eksponenttijakauman $\mathrm{Exp}(\lambda)$ kertymäfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0; \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{kun } x \geq 0. \end{cases}$$

Silloin minimin kertymäfunktio on

$$F_{(1)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0; \\ 1 - \mathrm{e}^{-n\lambda x}, & \text{kun } x \geq 0. \end{cases}$$

Minimi noudattaa siis eksponenttijakaumaa $\mathrm{Exp}(n\lambda)$. □

Jos otos on jatkuvasta jakaumasta, jonka tiheysfunktio on $f(x)$, saadaan $X_{(1)}$:n ja $X_{(n)}$:n jakaumien tiheysfunktiot derivoimalla kertymäfunktiot $F_{(n)}(x)$ ja $F_{(1)}(x)$. Nyt siis maksimin tiheysfunktio on

$$f_{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F(x)]^n = n[F(x)]^{n-1}f(x)$$

ja minimin tiheysfunktio on

$$f_{(1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigl(1 - [1 - F(x)]^n\bigr) = n[1 - F(x)]^{n-1}f(x).$$

9.5.2 Järjestyssuureen $X_{(k)}$ jakauma

Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos jakaumasta, jonka kertymäfunktio on $F(x)$. Johdetaan nyt järjestystunnusluvun $X_{(k)}$, $1 < k < n$, jakauma. Jos $\{X_{(k)} \leq x\}$, niin silloin ainakin k otosarvoa on pienempiä tai korkeintaan yhtä suuria kuin x. Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi tapausta $n = 3$. Johdetaan mediaanin $X_{(2)}$ jakauma. Tapahtuma $\{X_{(2)} \leq x\}$ toteutuu täsmälleen silloin, kun $\{X_1 \leq x,\ X_2 \leq x\}$ tai $\{X_1 \leq x,\ X_3 \leq x\}$ tai $\{X_2 \leq x,\ X_3 \leq x\}$ tai $\{X_1 \leq x,\ X_2 \leq x,\ X_3 \leq x\}$. Koska

$$P(X_i \leq x,\ X_j \leq x) = [F(x)]^2[1 - F(x)], \qquad i \neq j$$

ja

$$P(X_1 \leq x,\ X_2 \leq x,\ X_3 \leq x) = [F(x)]^3,$$

niin

$$\begin{aligned} F_{(2)}(x) = P(X_{(2)} \leq x) &= 3[F(x)]^2[1 - F(x)] + [F(x)]^3 \\ &= \sum_{i=2}^{3} \binom{3}{i} [F(x)]^i[1 - F(x)]^{3-i}. \end{aligned} \tag{9.5.1}$$

Yleisessä tapauksessa vastaava kaava voidaan johtaa samalla periaatteella. Emme kuitenkaan käsittele yleisen kaavan johtoa sen tarkemmin, toteamme vain, että $X_{(k)}$:n kertymäfunktio on

$$F_{(k)}(x) = P(X_{(k)} \leq x) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} [F(x)]^i[1 - F(x)]^{n-i}. \tag{9.5.2}$$

Jos otos on jatkuvasta jakaumasta, saadaan vastaava tiheysfunktio derivoimalla kertymäfunktio. Esitetään ensin $X_{(2)}$:n tiheysfunktio, kun $n = 3$. Kun kertymäfunktio (9.5.1) derivoidaan, saadaan

$$\begin{aligned} f_{(2)}(x) = F'_{(2)}(x) &= 3 \cdot 2F(x)f(x)[1 - F(x)] - 3[F(x)]^2 f(x) + 3[F(x)]^2 f(x) \\ &= 3!F(x)[1 - F(x)]f(x). \end{aligned}$$

Derivoimalla lauseke (9.5.2) saadaan satunnaismuuttujan $X_{(k)}$ tiheysfunktio yleisessä tapauksessa ($1 \leq k \leq n$):

$$f_{(k)}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}[F(x)]^{k-1}[1 - F(x)]^{n-k} f(x). \tag{9.5.3}$$

Esimerkki 9.12 Olkoon X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 otos jakaumasta, jonka tiheysfunktio on $f(x) = 2x$, $0 < x < 1$. Jakauman kertymäfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Silloin mediaanin tiheysfunktio on lausekkeen (9.5.3) nojalla

$$f_{(3)}(x) = \frac{5!}{2!2!} x^4 (1 - x^2)^2 \cdot 2x = 60x^5(1 - x^2)^2, \qquad 0 < x < 1.$$

Vastaavasti minimin tiheysfunktio on

$$f_{(1)}(x) = 10x(1 - x^2)^4, \qquad 0 < x < 1$$

ja maksimin tiheysfunktio on

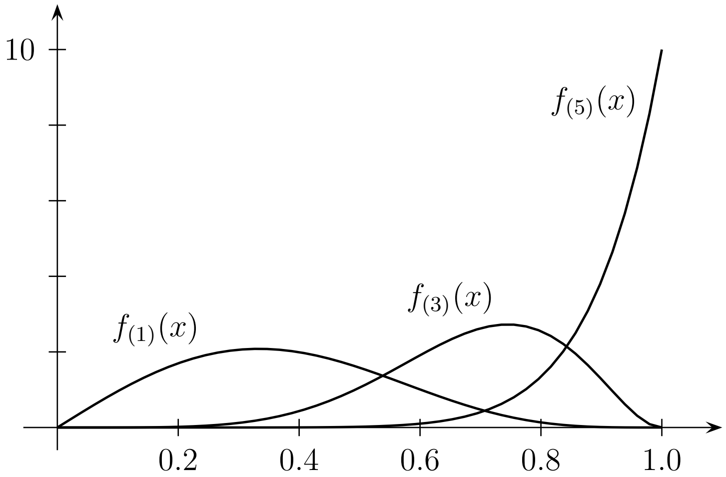
$$f_{(5)}(x) = 10x^9, \qquad 0 < x < 1.$$

□

Voidaan osoittaa, että järjestetyn otoksen $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ tiheysfunktio

$$f_{X_{(1)},\ldots,X_{(n)}}(y_1, \ldots, y_n) = \begin{cases} n! \prod_{i=1}^n f(y_i), & y_1 < \cdots < y_n; \\ 0 & \text{muualla,} \end{cases}$$

missä $f(y)$ on populaation jakauman tiheysfunktio.



Kuvio 9.1. Minimin, maksimin ja mediaanin tiheysfunktio, kun otos on jakaumasta $f(x) = 2x$, $0 < x < 1$.

9.6 Suppenemiskäsitteet

9.6.1 Markovin ja Tšebyševin epäyhtälöt sekä suurten lukujen laki

Osoitamme tässä alaluvussa Tšebyševin epäyhtälön avulla, että otoskeskiarvo $\overline{X}$ on hyvä populaation keskiarvon tunnusluku. Lähestymistapa on hieman erilainen kuin keskeisen rajaväittämän yhteydessä. Epäyhtälö pätee kaikille jakaumille, joilla on äärellinen hajonta.

Lause 9.13 (Markovin epäyhtälö) *Jos $X \geq 0$ on epänegatiivinen satunnaismuuttuja, niin silloin kaikilla $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$,*

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Yhtäsuuruus on voimassa silloin ja vain silloin kun $P(X = a) = p = 1 - P(X = 0)$ ja $0 < p \leq 1$.

Todistus. Todistetaan lause diskreeteille satunnaismuuttujille. Jatkuville satunnaismuuttujille todistus on vastaavanlainen. Olkoon S_X satunnaismuuttujan X mahdollisten arvojen joukko, $B = \{x \in S_X | x \geq a\}$, $B^c = \{x \in S_X | x < a\}$ ja $f(x)$ satunnaismuuttujan X todennäköisyysfunktio. Silloin

$$\begin{aligned} E(X) = \sum_{x \in S_X} x f(x) &= \sum_{x \in B} x f(x) + \sum_{x \in B^c} x f(x) \\ &\geq a \sum_{x \in B} f(x) = a\, P(X \geq a). \end{aligned}$$

Tästä seuraa tulos

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

$\square$

Lause 9.14 (Tšebyševin epäyhtälö) *Mille tahansa satunnaismuuttujalle X ja vakioille $a > 0$ ja c pitää paikkansa epäyhtälö*

$$P(|X - c| \geq a) \leq \frac{E(X-c)^2}{a^2}. \tag{9.6.1}$$

Todistus. Koska $(X - c)^2 \geq 0$, niin Markovin epäyhtälön mukaan

$$P[(X-c)^2 \geq a^2] \leq \frac{E[(X-c)^2]}{a^2}.$$

Koska epäyhtälöt $(X - c)^2 \geq a^2$ ja $|X - c| \geq a$ ovat yhtäpitäviä, saadaan Tšebyševin epäyhtälö. □

Kun epäyhtälössä (9.6.1) valitaan $c = \mu$, saadaan

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}, \tag{9.6.2}$$

missä $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$ ja $\mu = E(X)$. Usein Tšebyševin epäyhtälö lausutaan muodossa (9.6.2).

Otoskeskiarvo ja Tšebyševin epäyhtälö

Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos jakaumasta F, jonka keskiarvo on μ ja varianssi σ^2. Otossumma ja otoskeskiarvo ovat

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \qquad \overline{X}_n = \frac{S_n}{n}.$$

Silloin

$$E(S_n) = n\mu, \qquad \mathrm{Var}(S_n) = n\sigma^2, \qquad E(\overline{X}_n) = \mu, \qquad \mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Kun sovelletaan Tšebyševin epäyhtälöä otoskeskiarvoon $\overline{X}_n$, saadaan jokaista $\varepsilon > 0$ kohti

$$P(|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}. \tag{9.6.3}$$

Lause 9.15 (Heikko suurten lukujen laki (HSLL)) *Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ riippumattomien ja samaa jakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien jono (otos), jossa jokaisen satunnaismuuttujan odotusarvo on μ ja varianssi σ^2. Olkoon $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ ja*

$$\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}.$$

Silloin jokaisella $\varepsilon > 0$,

$$P(|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \to 0, \qquad \text{kun } n \to \infty.$$

Todistus. Tšebyševin epäyhtälön mukaan (vrt. (9.6.3))

$$P(|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Kun $n \to \infty$, niin $\sigma^2/(n\varepsilon^2) \to 0$, joten

$$P(|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Näin on lause todistettu. □

9.6.2 Jensenin epäyhtälö

Jensenin epäyhtälö perustuu funktion konveksisuuden käsitteeseen. Konveksin funktion kuvaaja on kovera eli kuvaaja "pitää vettä".

Määritelmä 9.2 Funktio $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on konveksi, jos jokaista $a \in \mathbb{R}$ kohti on olemassa sellainen $\lambda(a)$, että

$$g(x) \geq g(a) + \lambda(a)(x - a) \tag{9.6.4}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Sanomme, että g on aidosti konveksi, jos epäyhtälö (9.6.4) on aito.

Jos $g(x)$ on derivoituva, niin sopiva λ:n valinta on g:n derivaatta $\lambda(a) = g'(a)$ ja epäyhtälö (9.6.4) on silloin muotoa

$$g(x) \geq g(a) + g'(a)(x - a).$$

Tämän epäyhtälön perusteella voidaan päätellä, että funktion $g(x)$ kuvaaja on tangenttinsa yläpuolella. Derivoituva funktio $g(x)$ on konveksi jos ja vain jos sen derivaatta $g'(x)$ on kasvava. Jos 2. derivaatta on olemassa, niin g:n konveksisuuden välttämätön ja riittävä ehto on $g''(x) \geq 0$. Vastaavasti g on aidosti konveksi, jos $g''(x) > 0$.

Lause 9.16 (Jensenin epäyhtälö) *Olkoon X satunnaismuuttuja, jolla on äärellinen odotusarvo, ja $g(x)$ on konveksi funktio. Silloin*

$$E[g(X)] \geq g[E(X)]. \tag{9.6.5}$$

Jos g on aidosti konveksi, niin epäyhtälö (9.6.5) on aito ellei X ole vakio.

Todistus. Valitaan epäyhtälössä (9.6.4) $a = E(X)$. Silloin saadaan

$$g(X) \geq g(E(X)) + \lambda(X - E(X)). \tag{9.6.6}$$

Kun epäyhtälössä (9.6.6) otetaan puolittain odotusarvot, saadaan tulos (9.6.5). □

Esimerkki 9.13 Esimerkiksi funktiot $g(x) = |x|$ ja $g(x) = x^2$ ovat konvekseja funktioita. Jos X:llä on äärellinen 2. momentti, $E(X) = \mu$ ja X ei ole vakio, niin Jensenin epäyhtälön (9.6.5) mukaan $E(X^2) > \mu^2$, koska $g(x) = x^2$ on aidosti konveksi ($g''(x) = 2 > 0$). Vastaavalla päättelyllä voidaan osoittaa, että $E(\log(X)) < \log[E(X)]$, jos X ei ole vakio. Ensin on huomattava, että funktio $g(x) = -\log(x)$ on aidosti konveksi, sillä $g''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$. □

9.6.3 Stokastinen suppeneminen

Osoitimme alavuvussa 4.5 Tšebyševin epäyhtälön avulla, että otoskeskiarvo $\overline{X}$ on hyvä populaation keskiarvon tunnusluku. Tarkastelu perustui itse asiassa ns. stokastisen suppenemisen käsitteeseen.

Määritelmä 9.3 Satunnaismuuttujien jono $\{X_n\}$ suppenee stokastisesti kohti satunnaismuuttujaa X, jos kaikilla $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

tai yhtäpitävästi

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1.$$

Stokastista suppenemista sanotaan myös suppenemiseksi todennäköisyyden mielessä ja merkitään $X_n \xrightarrow{P} X$. Usein tarkastellaan tilannetta, että satunnaismuuttuja, jota lähestytään, on vakio. Tällainen tilanne on heikossa suurten lukujen laissa (Lause 4.9, HSLL). HSLL sanoo, että otoskeskiarvo suppenee stokastisesti kohti populaation keskiarvoa, kun otoskoko kasvaa.

Olkoon $\{X_n\}$ sellaisten satunnaismuuttujien jono, että $E(X_n) = \mu$ ja $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2$. Heikon suurten lukujen lain mukaan

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu,$$

missä $\overline{X}_n = (X_1+X_2+\cdots+X_n)/n$. Lause todistettiin Tšebyševin epäyhtälön avulla.

Esimerkki 9.14 Olkoon $\{X_n\}$ jono sellaisia diskreettejä satunnaismuuttujia, että

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{n} \qquad \text{ja} \qquad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Silloin

$$P(|X_n| \geq \varepsilon) = \begin{cases} P(X_n = 1) = \dfrac{1}{n}, & \text{kun } 0 < \varepsilon < 1; \\ 0, & \text{kun } \varepsilon \geq 1. \end{cases}$$

Tästä nähdään, että $P(|X_n| \geq \varepsilon) \to 0$, kun $n \to \infty$. Voimme siis sanoa, että $X_n \xrightarrow{P} 0$. □

Esimerkki 9.15 (Otosvarianssin tarkentuvuus) Olkoon $\{X_n\}$ sellainen satunnaismuuttujien jono, että $E(X_n) = \mu$ ja $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2 < \infty$. Otosvarianssi on

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

Tiedämme, että $E(S_n^2) = \sigma^2$. Tšebyševin epäyhtälön mukaan

$$P(|S_n^2 - \sigma^2| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(S_n^2 - \sigma^2)^2}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{Var}(S_n^2)}{\varepsilon^2}.$$

Jos nyt $\mathrm{Var}(S_n^2) \to 0$, kun $n \to \infty$, niin $\lim_{n\to\infty} P(|S_n^2 - \sigma^2| \geq \varepsilon) = 0$ ja $(S_n^2, n \geq 1)$ suppenee stokastisesti kohti populaation varianssia. □

Stokastista suppenemista koskevia tuloksia

Lause 9.17 *Olkoot* $(X_n, n \geq 1)$ *ja* $(Y_n, n \geq 1)$ *kaksi satunnaismuuttujien jonoa,* X *ja* Y *satunnaismuuttujia sekä* c *ja* b *vakioita,* $b \neq 0$*. Oletetaan, että* $n \to \infty$*.*

(SS1) *Jos* $E(X_n - c)^2 \to 0$*, niin* $X_n \xrightarrow{P} c$*.*

(SS2) *Jos* $X_n \xrightarrow{P} X$ *ja* $Y_n \xrightarrow{P} Y$*, niin* $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$*.*

(SS3) *Jos* $X_n \xrightarrow{P} X$*, niin* $cX_n \xrightarrow{P} cX$*.*

(SS4) *Jos* $X_n \xrightarrow{P} X$ *ja* $Y_n \xrightarrow{P} Y$*, niin* $X_nY_n \xrightarrow{P} XY$*.*

(SS5) *Jos* $X_n \xrightarrow{P} c$ *ja* $Y_n \xrightarrow{P} b$*,* c *ja* $b \neq 0$ *vakioita, niin* $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{P} \frac{c}{b}$*.*

Lause 9.18 *Olkoon* g *pisteessä* c *jatkuva reaalifunktio.*

(a) *Jos* $X_n \xrightarrow{P} c$*, niin* $g(X_n) \xrightarrow{P} g(c)$*.*

(b) *Jos* $X_n \xrightarrow{P} X$*, niin* $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$*.*

Todistus. Todistetaan kohta (a). Olkoon ϵ mikä tahansa positiiviluku. Funktion g jatkuvuuden nojalla voidaan aina valita sellainen $\delta > 0$, että

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(c)| < \epsilon$$

ja vastaavasti

$$|g(x) - g(c)| \geq \epsilon \Rightarrow |x - c| \geq \delta. \tag{9.6.7}$$

Epäyhtälön (9.6.7) nojalla $\{x : \ |g(x) - g(c)| \geq \epsilon\} \subset \{x : \ |x - c| \geq \epsilon\}$, joten

$$P(|X_n - c| \geq \epsilon) \geq P(|g(X_n) - g(c)| \geq \epsilon\}).$$

Oletuksen mukaan $P(|X_n - c| \geq \epsilon) \to 0$, joten $P(|g(X_n) - g(c)| \geq \epsilon\} \to 0$. Siis $g(X_n) \xrightarrow{P} g(c)$. □

Apulause 9.1 *Olkoot* $(A_n, n \geq 1)$ *ja* $(B_n, n \geq 1)$ *sellaiset tapahtumien jonot, että* $P(A_n) \to 1$ *ja* $P(B_n) \to 1$*, kun* $n \to \infty$*. Silloin* $P(A_n \cap B_n) \to 1$*, kun* $n \to \infty$*.*

Todistus. Sovella De Morganin sääntöjä tapahtumiin $A_n \cap B_n$ ja käytä sitten todennäköisyyksien yhteelaskulausetta. □

Lauseen 9.17 kohdan (SS2)

Todistus. Huomaa, että $X_n \xrightarrow{P} X \iff X_n - X \xrightarrow{P} 0$ ja $Y_n \xrightarrow{P} Y \iff Y_n - Y \xrightarrow{P} 0$. Kolmioepäyhtälön mukaan

$$|(X_n + Y_n) - (X + Y)| \leq |X_n - X| + |Y_n - Y|.$$

Kun valitaan $|X_n - X| < \frac{\epsilon}{2}$ ja $|Y_n - Y| < \frac{\epsilon}{2}$, niin $|X_n - X| + |Y_n - Y| < \epsilon$. Koska

$$\{\omega : |X_n - X| < \frac{\epsilon}{2}\} \cap \{\omega : |Y_n - Y| < \frac{\epsilon}{2}\} \subset \{\omega : |X_n - X| + |Y_n - Y| < \epsilon\},$$

niin

$$P(|(X_n + Y_n) - (X + Y)| < \epsilon) \geq P(\{|X_n - X| < \frac{\epsilon}{2}\} \cap \{|Y_n - Y| < \frac{\epsilon}{2}\}).$$

Koska $P(\{|X_n - X| < \frac{\epsilon}{2}\}) \to 1$ ja $P(\{|Y_n - Y| < \frac{\epsilon}{2}\}) \to 1$, niin Apulauseen 9.1 perusteella seuraa väite. □

Määritelmä 9.4 (Suppeneneminen keskineliövirheen mielessä) Satunnaismuuttujien jono $(X_n, n \geq 1)$ suppenee keskineliövirheen mielessä kohti satunnaismuuttujaa X, jos

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n - X)^2 = 0,$$

missä $E(X_n^2)\, E(X^2) < \infty$. Silloin merkitään $X_n \xrightarrow{mse} X$.

Lause 9.19 *Jos $X_n \xrightarrow{mse} X$, niin $X_n \xrightarrow{P} X$.*

Todistus. Tšebyševin epäyhtälö nmukaan

$$P(|X_n - X| \geq \epsilon) \leq \frac{E(X_n - X)^2}{\epsilon^2} \quad \text{kaikilla } \epsilon > 0.$$

Koska $X_n \xrightarrow{mse} X$, niin Määritelmän 9.4 mukaan $E(X_n - X)^2 \to 0$, kun $n \to \infty$. Näin $P(|X_n - X| \geq \epsilon) \to 0$, kun $n \to \infty$. Stokastisen suppenemisen määritelmän mukaan siis $X_n \xrightarrow{P} X$. □

9.6.4 Suppeneminen jakaumamielessä

Olemme edellä jo useaan otteeseen tutustuneet suppenemiseen jakaumamielessä. Käsite määriteltiin alaluvussa 5.3.4 (Määritelmä 5.1). Satunnaismuuttujien jono $(X_n, n \geq 1) = (X_1, X_2, \ldots)$ suppenee jakaumaltaan kohti satunnaismuuttujaa X ($X_n \xrightarrow{d} X$, kun $n \to \infty$), jos

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

kaikissa pisteissä x, joissa $F_X(x)$ on jatkuva. Huomattakoon, että momenttifunktioiden jonon suppenemisesta seuraa vastaavien jakaumien suppeneminen jakaumamielessä.

Esimerkki 9.16 Olkoot $(X_n,\ n \geq 1)$ satunnaismuuttujia, joiden kertymäfunktiot ovat muotoa

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 1 - \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2}, & \text{kun } 1 - \frac{1}{n} \leq x < 1 + \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{kun } x \geq 1 + \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Satunnaismuuttujan X kertymäfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 1 \\ 1, & \text{kun } x \geq 1. \end{cases}$$

Kertymäfunktio F on jatkuva muualla, paitsi pisteessä $x = 1$. Kun $x < 1$, valitaan $n_0 > 1/(1-x)$. Silloin $x < 1 - \frac{1}{n_0}$ ja myös $x < 1 - \frac{1}{n}$ kaikilla $n \geq n_0$. Näin $F_n(x) = 0$, kun $n \geq n_0$. Kun $x > 1$, valitaan $n_0 \geq 1/(x-1)$. Silloin $x \geq 1 + \frac{1}{n_0}$ ja $x \geq 1 + \frac{1}{n}$ kaikilla $n \geq n_0$. Siksi $F_n(x) \to F(x)$, kun $x \neq 1$. Jos siis $X_n \sim F_n$ ja $X \sim F$, niin $X_n \xrightarrow{d} X$. Huomattakoon, että $F_n(x) \not\to F(x)$ epäjatkuvuuspisteessä 1. $F_n(1) = \frac{1}{2}$ kaikilla n, mutta $F(1) = 1$. □

Stokastinen suppeneminen on vahvempi käsite kuin suppeneminen jakaumamielessä. Satunnaismuuttujien jono voi siis supeta jakaumamielessä mutta ei stokastisesti. Toisaalta stokastinen suppeneminen implikoi suppenemisen jakaumamielessä.

Lause 9.20 *Jos $X_n \xrightarrow{P} X$, niin $X_n \xrightarrow{d} X$.*

Todistus. Kaikilla $\epsilon > 0$ pitää paikkansa

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P(X_n \leq x) \\ &= P(X_n \leq x, X \leq x + \epsilon) + P(X_n \leq x, X > x + \epsilon) \\ &\leq F(x + \epsilon) + P(|X_n - X| > 0). \end{aligned}$$

Samoin

$$\begin{aligned} F(x - \epsilon) &= P(X \leq x - \epsilon) \\ &= P(X \leq x - \epsilon, X_n \leq x) + P(X \leq x - \epsilon, X_n > x) \\ &\leq F_n(x) + P(|X_n - X| > 0). \end{aligned}$$

Siksi

$$\begin{aligned} F(x - \epsilon) - P(|X_n - X| > 0) &\leq F_n(x) \\ &\leq F_n(x + \epsilon) + P(|X_n - X| > 0). \end{aligned} \tag{9.6.8}$$

Kun $n \to \infty$, seuraa epäyhtälöstä (9.6.8) epäyhtälö

$$F(x - \epsilon) \leq F_n(x) \leq F(x + \epsilon).$$

Kun $\epsilon \to 0$, $F_n(x) \to F(x)$ kaikissa F:n jatkuvuuspisteissä. □

Erityisesti, jos jono $X_n,\ n \geq 1$ suppenee kohti vakiota a (ts. $P(X = a) = 1$) stokastisesti, niin Lauseen 9.20 mukaan $X_n \xrightarrow{d} a$. Tässsä erikoistapauksessa pitää paikkansa myös käänteinen tulos ja seuraava lause.

Lause 9.21 *Olkoon a vakio. Silloin $X_n \xrightarrow{d} a \iff X_n \xrightarrow{P} a$.*

Todistus. Osoitamme, että suppenemisesta jakaumamielessä seuraa suppeneminen stokastisesti. Olkoon F sellaisen X:n kertymäfunktio, että $P(X = a) = 1$ ja $(F_n,\ n \geq 1)$ kertymäfunktioiden jono, missä F_n on X_n:n kertymäfunktio. Nyt $F(x) = 0$, kun $x < a$ ja $F(x) = 1$ kaikilla x:n arvoilla $x \geq a$. Pisteet $a - \epsilon$ ja $a + \epsilon$ ovat siis F:n jatkuvuuspisteitä kaikilla $\epsilon > 0$. Nyt

$$\begin{aligned} P(|X_n - a| < \epsilon) &\leq P(|X_n - a| \leq \epsilon) \\ &= P(a - \epsilon \leq X_n \leq a + \epsilon) \\ &= P(X_n \leq a + \epsilon) - P(X_n < a - \epsilon) \\ &= F_n(a + \epsilon) - P(X_n < a - \epsilon). \end{aligned}$$

Jos $X_n \xrightarrow{d} X$, niin $F_n(a+\epsilon) \to 1$ ja $P(X_n < a-\epsilon) \leq F_n(a-\epsilon) \to 0$ kaikilla $\epsilon > 0$, kun $n \to \infty$. Siis $P(|X_n - a| \leq \epsilon) \to 1$, kun $n \to \infty$ eli $X_n \xrightarrow{P} a$. □

Jos $X_n \xrightarrow{d} X$, niin siitä ei seuraa, että tiheysfunktiot tai todennäköisyysfunktiot (diskreetti satunnaismuuttuja) $f_n(x)$ suppenevat kohti X:n tiheysfunktiota $f(x)$. Tämä osoitetaan seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 9.17 Olkoon $\{X_n\},\ n \geq 1$ sellainen satunnaismuuttujien jono, että jonon satunnaismuuttujien todennäköisyysfunktiot ovat

$$f_n(x) = P(X_n = x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = 2 + \frac{1}{n}; \\ 0, & \text{kun } x \neq 2 + \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Huomaa, että $f_n(2) = 0$ kaikilla n. Tästä seuraa, että $f_n(x) \to f(x)$, missä $f(x) = 0$ kaikilla x. Satunnaismuuttujan X_n kertymäfunktio on muotoa

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 2 + \frac{1}{n}; \\ 1, & \text{kun } x \geq 2 + \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Kun $n \to \infty$, niin $F_n(x) \to F(x)$, missä

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2; \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

$F(x)$ on pisteeseen $x = 2$ degeneroituneen jakauman kertymäfunktio. Nyt siis X:n todennäköisyysfunktio $f(2) = 1$ ja $f(x) = 0$, kun $x \neq 2$. Todennäköisyysfunktioiden $f_n(x)$ jono ei kuitenkaan suppene kohti tämän jakauman todennäköisyysfunktiota, koska $f_n(2) = 0$ kaikilla n. □

Olkoon $\{X_n\}$ jono satunnaismuuttujia, joiden odotusarvo on μ ja varianssi σ^2. Silloin keskeisen rajaväittämän mukaan

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z,$$

missä $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. Huomattakoon, että Z_n:n jakaumat ovat usein diskreettejä, mutta silti rajajakauma on normaalijakauma. Kun n on riittävän suuri, niin

$$P\left(a \leq \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq b\right) \approx \Phi(b) - \Phi(a).$$

Jos esimerkiksi $X_n \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, niin silloin keskeisen rajaväittämän mukaan

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{d} Z,$$

missä $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. Tätä tulosta kutsutaan *De Moivren ja Laplacen* lauseeksi.

Lause 9.22 (Slutskyn lause) *Olkoot $X_1, X_2, \ldots$ ja $Y_1, Y_2, \ldots$ satunnaismuuttujien jonoja ja a vakio. Jos $X_n \xrightarrow{d} X$ ja $Y_n \xrightarrow{P} a$, niin*

1. $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + a$

2. $Y_n X_n \xrightarrow{d} aX$.

Slutskyn lause voidaan todistaa samanlaisella tekniikalla kuin lause 9.20.

Rajoitumme tässä esityksessä kahteen edellä esitettyyn suppenemiskäsitteeseen: stokastiseen suppenemiseen ja suppenemiseen jakaumamielessä. Esitämme kuitenkin vielä ns. melkein varman (m.v.) suppenemisen määritelmän.

Määritelmä 9.5 Jono $\{X_n\}$ suppenee melkein varmasti kohti satunnaismuuttujaa X, jos

$$P\big(\lim_{n\to\infty} |X_n - X| < \varepsilon\big) = 1.$$

Näennäisesti määritelmä muistuttaa stokastisen suppenemisen määritelmää, vaikka käsitteet ovat sisällöllisesti erilaisia.