Tilastollinen päättely I
8. harjoitukset, 11. vko 2012

8.1. Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos populaatiosta, jonka äärellinen keskiarvo on μ. Mitkä ehdot vakioille $a_1, \ldots, a_n$ on asetettava, jotta estimaattori

$$a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n$$

on μ:n harhaton estimaattori.

8.2. Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos sellaisesta jakaumasta, että $E(X_i) = \mu$ ja $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2, i = 1, \ldots, n$. Määritä otossuureen $T = \exp(\bar{X})$ likimääräinen jakauma, kun n on suuri (Delta-menetelmä, Lause 11.1).

8.3. Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos Poissonin jakaumasta $\mathrm{Poi}(\lambda)$. Mikä on otossuureen $T = \sqrt{\bar{X}}$ likimääräinen jakauma, kun n on suuri (Delta-menetelmä, Lause 11.1).

8.4. Bernoullin jakaumasta $\mathrm{Ber}(\theta)$ on havaittu otos $X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 1$. Tarkastellaan tunnuslukua $T = \sum_{i=1}^4 X_i$. Laske todennäköisyydet $P(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 1 | T = 3)$ ja $P(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 1 | T \neq 3)$. Totea, että todennäköisyys ei riipu θ:sta. (Ks. Esimerkki 11.11).

8.5. Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos normaalijakaumasta $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

(a) Olkoon $\sigma^2 = 1$. Näytä, että otoskeskiarvo $\bar{X}$ on μ:n tyhjentävä tunnusluku. (Tekijälause)

(b) Olkoon $\mu = 0$. Näytä, että $\sum_{i=1}^n X_i^2$ on σ^2:n tyhjentävä tunnusluku. (Tekijälause)

(c) Määritä σ^2:n harhaton estimaattori. Onko se tyhjentävä?

8.6. Tarkastellaan edellisen tehtävän a-kohdan tilannetta. Tekijälauseen mukaan pystyt lausumaan tiheysfunktion muodossa

$$f(x_1, \ldots, x_n; \mu) = g(\bar{x}, \mu) h(x_1, \ldots, x_n).$$

(a) Oletetaan, että yksittäisiä otosarvoja ei tunneta, mutta $\bar{x} = 5$. Laske SUE $\hat{\mu}$.

(b) Meillä on kaksi otosta: $3, 6, 4, 3, 9$ ja $5, 9, 1, 6, 4$. Määritä kummastakin otoksesta $g(\bar{x}, \mu)$ ja funktion $h(\cdot)$ arvo sekä SUE $\hat{\mu}$.

8.7. Oletetaan yhden selittävän muuttujan regressiomalli, missä selitettävät muuttujat $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat toisistaan riippumattomat ja $Y_i \sim \mathrm{N}(\alpha + \beta x_i, 1)$, missä selittävän muuttujan arvot $x_i,\ 0 \leq i \leq n$ ovat annettuja vakioita. (Ks. Esimerkki 10.7) Näytä, että uskottavuusfunktio on lausuttavissa muodossa $g(t_1, t_2, \alpha, \beta)h(y_1, \ldots, y_n)$, missä $t_1 = \sum_{i=1}^n y_i$ ja $t_2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Vektori (t_1, t_2) on siis parametrivektorin (α, β) tyhjentävä tunnusvektori.

8.8. Lausutaan Bernoullin jakauman todennäköisyysfunktio muodossa

$$\theta^x (1-\theta)^{1-x} = \exp[x \log \frac{\theta}{1-\theta} + \log(1-\theta)], \quad x \in \{0, 1\}.$$

Merkitään $\eta = \log \frac{\theta}{1-\theta}$ (log odds, vedon logaritmi). Funktio $-\log(1-\theta)$ voidaan lausua parametrin η avulla muodossa $\log(1 + e^\eta)$. Merkitse $A(\eta) = \log(1+e^\eta)$ ja laske derivaatat $A'(\eta)$ ja $A''(\eta)$. Totea, että $A'(\eta) = E(X)$ ja $A''(\eta) = \mathrm{Var}(X)$, missä $X \sim \mathrm{Ber}(\theta)$. Bernoullin jakauma kuuluu ns. eksponentiaaliseen perheeseen.