**Tilastollinen päättely I**
7. harjoitukset, 9. vko 2012

7.1. Olkoon $X_1, \dots, X_n$ otos Bernoullin jakaumasta $\mathrm{Ber}(\theta)$. Osoita, että $\theta$:n SUE on tehokas (eli saavuttaa Cramerin ja Raon alarajan).

7.2. Olkoon $X \sim \mathrm{Exp}(\theta)$. Laske

(a) pistefunktion varianssi $\mathrm{Var}[S(\theta; X)]$ ja

(b) odotettu informaatio $E[I(\theta; X)]$.

(c) Näytä, että otoskeskiarvo $\bar{X}$ on minimivarianssinen, kun $\bar{X}$ on laskettu otoksesta $X_1, \dots, X_n$.

7.3. Valitaan $n$:n alkion otos jakaumasta, jonka tiheysfunktio on

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta^2} x e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0, \quad \theta > 0.$$

Määritä $\theta$:n SUE. Totea, että se on harhaton ja määritä Cramerin ja Raon alaraja.

7.4. Olkoon $X \sim \mathrm{Bin}(n, \pi)$.

(a) Määritä $\pi$:n estimaattorien $T_1 = X/n$ ja $T_2 = (X+1)/(n+2)$ keskineliövirhe (MSE).

(b) Kummalla estimaattorilla on pienempi MSE, kun $n = 100$ ja $\pi = 0.4$?

7.5. Tehdään otos $X_1, \dots, X_n,\ n \geq 3$ eksponettijakaumasta $\mathrm{Exp}(\theta)$. Tarkastellaan estimaattoreita (Minimin jakauma, ks. alaluku 9.5.1)

$$\hat{\theta}_1 = X_1, \quad \hat{\theta}_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad \hat{\theta}_3 = \bar{X}, \quad \theta_4 = \min\{X_1, X_2, X_3\}.$$

(a) Määritä jokaisen estimaattorin odotusarvo ja varianssi.

(b) Onko mikään estimaattoreista tehokas?

(c) Mikä estimaattori on SUE?

7.6. Olkoon $X_1, \dots, X_n$ otos gammajakaumsta $\Gamma(\alpha, \beta)$. Määritä $\alpha$:n ja $\beta$:n estimaattorit momenttimenetelmällä.

7.7. Muodostetaan parametrin $\pi^2$ harhaton estimaattori $T(X)$, kun $X \sim \mathrm{Bin}(n, \pi),\ n > 1,\ 0 < \pi < 1$.

(a) Laske $\pi^2$:n estimaattorin $T(X) = (X/n)^2$ harha.

(b) Osoita laskemalla, että estimaattori $T_1(X) = \frac{1}{n-1}(nX - X^2)$ on varianssin $n\pi(1-\pi)$ harhaton estimaattori ja

(c) $T(X) - T_1(X)/n^2$ on $\pi^2$:n harhaton estimaattori, missä $T(X)$ on a-kohdassa määritelty estimaattori.

7.8. Olkoon $X_1, \ldots, X_n$ otos tasajakaumasta $\mathrm{Tas}(0, \theta)$. Olkoon $\theta$:n estimaattori $T = X_{(n)}$ (havaintojen maksimi). Laske estimaattorin harha. Näytä, että estimaattori on tarkentuva (Maksimin jakauma, ks. alaluku 9.5.1).