

Tilastollinen päättely I

6. harjoitukset, 8. vko 2012

6.1. Seuraavan taulukon aineisto on otos ($n = 55$) Poissonin jakaumasta.

x	0	1	2	3	4	5
Frekvenssi	7	14	12	13	6	3

Määritä todennäköisyyden $P(X = 2)$ SUE (suurimman uskottavuuden estimaatti). (Vihje: Estimoi Poissonin parametri ja käytä uskottavuuden invarianssia, alaluku 10.7)

6.2. Olkoon x_1, \dots, x_n otos Bernoullin jakaumasta $\text{Ber}(\pi)$, $\sum_{i=1}^n x_i = 41$ ja $n = 90$. Tiedämme, että π vaihtelee välillä $1/2 \leq \pi \leq 1$ ts. parametriavaruus on $[1/2, 1]$. Määritä π :n SUE.

6.3. Riippumattomat satunnaismuuttujat X_1, \dots, X_{20} noudattavat Poissonin jakaumaa $\text{Poi}(\beta i)$, $i = 1, \dots, 20$, missä $\beta > 0$ on tuntematon parametri. Saatiin otos 1, 3, 1, 0, 4, 6, 9, 6, 8, 8, 6, 14, 13, 13, 20, 20, 17, 11, 13, 22. Laske β :n SUE. (Vrt. Esimerkki 10.11)

6.4. Bernoullin jakaumasta $\text{Ber}(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 1$ saatiin 15 havainnon otos: 001001101011001. Määritä otoksen yhteisjakauman todennäköisyysfunktio ja θ :n uskottavuusfunktio. Määritä θ :n SUE $\hat{\theta}$, havaittu informaatio ja Fisherin informaatio [ks. (10.8.4)].

6.5. Olkoon x_1, \dots, x_n havaittu otos normaalijakaumasta $N(1, \sigma^2)$. Muodosta parametrin σ^2 pistefunktio $S(\sigma^2; x_1, \dots, x_n)$ ja informaatiofunktio $I(\sigma^2; x_1, \dots, x_n)$. Määritä σ^2 :n SUE (suurimman uskottavuuden estimaatti) $\hat{\sigma}^2$ sekä havaittu informaatio $I(\hat{\sigma}^2)$ (Ks. Esimerkki 10.4).

6.6. Havainnot 1, 3, 3, 5, 7, 8 ovat peräisin lineaarisesta regressiomallista $N(\beta x_i, 1)$, $i = 1, \dots, 5$, missä $x_1 = x_2 = x_3 = -1$ ja $x_4 = x_5 = x_6 = 1$. Esimerkiksi $(y_4, x_4) = (5, 1)$. Laske β :n SUE, informaatiofunktio ja havaittu informaatio. (Ks. Esimerkki 10.7)

6.7. Olkoon X_1, \dots, X_n otos Poissonin jakaumasta $\text{Poi}(3)$. Määritä piste-suure, sen odotusarvo ja varianssi (vrt. Esimerkki 10.16).

6.8. Olkoon X sellainen positiivinen satunnaismuuttuja, että $P(X > x) = \theta/(\theta + x)$ kaikilla $0 < x < \infty$, missä θ on positiivinen reaaliluku. Silloin X :n tiheysfunktio $f(x) = \theta/(\theta + x)^2$. Määritä logaritmoitu uskottavuusfunktio $l(\theta)$, pistefunktio ja informaatiofunktio. Saadaan otos 1.5, 4.8, 7.0, 3.3, 5.5. SUE:lla ei ole suljetun muodon lauseketta. Määritä SUE numeerisesti (Piirrä $l(\theta)$.) (Ks. tiedosto: paattely-I-2012/Luennot/Luku10E1-2.txt)