Tilastollinen päättely I
5. harjoitukset, 7. vko

5.1. Tehdään 5 riippumatonta Bernoullin koetta eli otos X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 Bernoullin jakaumasta Ber(θ) ja saadaan tulos 10011 (eli $X_1 = 1, X_2 = 0$ jne.). Muodosta uskottavuusfunktio $L_1(\theta)$ määrittämällä tuloksen 10011 todennäköisyys. Muodosta sitten uskottavuusfunktio $L_2(\theta)$, jos tiedetään pelkästään, että onnistumisia on 3 (binomijakauma). Määritä suurimman uskottavuuden estimaatti.

5.2. Tehdään kolmen ($n = 3$) kokoinen otos normaalijakaumasta $\mathrm{N}(\theta, 1)$. Otoskeskiarvoksi saatiin 4. Määritä θ:n uskottavuusfunktio ja suurimman uskottavuuden estimaatti.

5.3. Lampun kestoaika X noudattaa eksponenttijakaumaa, jonka tiheysfunktio on $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}$. Määritä θ:n uskottavuusfunktio $L(\theta)$ ja funktion maksimikohta (jos olemassa) kun

(a) havaitaan, että $X > 1000$ [$L(\theta) = P(X > 1000;\theta)$].

(b) havaitaan, että $X = 1000$.

5.4. Lampun kestoaika X noudattaa eksponenttijakaumaa kuten edellisessä tehtävässä. Valitaan kolmen testilampun otos (ks. Esimerkki 9.11). Annetaan kaikkien lamppujen palaa niin kauan kunnes yksi hajoaa. Koe kesti 1000 aikayksikköä eli $X_{(1)} = 1000$ (minimi), kun $n = 3$. Määritä θ:n uskottavuusfunktio $L(\theta)$ ja suurimman uskottavuuden estimaatti.

5.5. Tarkastellaan aspiriiniaineistoa (Alaluku 8.1, Aspiriiniaineisto, Taulukko 8.1). Oletetaan, että infarktien lukumäärä X noudattaa binomijakaumaa $\mathrm{Bin}(\theta, n)$. Piirrä binomijakauman uskottavuusfunktio ja laske θ:n SUE, (a) kun havaitaan $X = 139$ ja $n_A = 11037$ (aspiriiniryhmä), (b) kun havaitaan $X = 239$ ja $n_L = 11034$ (lumeryhmä). Laske todennäköisyys $P(X \leq 139;\theta)$, kun θ:n arvona käytetään koko aineistosta ($n = n_A + n_L$) laskettua estimaattia olettaen, että aspiriiniryhmässä ja lumeryhmässä olisi sama θ:n arvo.(Vrt. Esim. 10.3)

5.6. Tarkastellaan toistettavissa olevaa koetta, jonka mahdolliset tulokset muodostavat otosavaruuden Ω ja A on tapahtuma Ω:ssa (A on esimerkiksi kruuna lantin heitossa). Toistetaan koetta n kertaa. Olkoon $X_i = 1$, jos A sattuu ja $X_i = 0$, jos A ei satu i. toistossa. Silloin $E(X_i) = P(A)$ ja $X_1 + \cdots + X_n = n(A)$ on A:n frekvenssi n:n kokeen sarjassa. Näytä heikon suurten lukujen lain (Lause 9.15) nojalla, että suhteelinen frekvenssi $n(A)/n$ lähenee todennäköisyyden mielessä todennäköisyyttä $P(A)$. (Vihje: Valitse Määritelmässä 9.3 $X_n = n(A)/n$ ja $X = P(A)$. Huomaa, että $n(A)/n$ on otoskeskiarvo.)

5.7. Valitaan otos $X_1, \ldots, X_n$ jakaumasta, jonka kertymäfunktio on F. Empiirisen kertymäfunktion $\hat{F}_n$ arvo pistessä x on $n(x)/n$, missä $n(x)$ on niiden otosarvojen X_i $(i = 1, \ldots, n)$ lukumäärä, jotka toteuttavat ehdon $X_i \leq x$. Näytä heikon suurten lukujen lain nojalla, että $\hat{F}_n(x)$ lähenee todennäköisyyden mielessä pistettä $F(x) = P(X \leq x)$. (Vihje: Määrittele $Y_i = 1$, jos $X_i \leq x$ ja $Y_i = 0$ muutoin. Käytä samaa tekniikkaa kuin edellisessä yehtävässä.)

5.8. Olkoon X_1, X_2 otos jakaumasta F (kertymäfunktio) ja $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2\}$ ja $X_{(2)} = \max\{X_1, X_2\}$. Nyt

$$\{X_{(1)} \leq x_1, X_{(2)} \leq x_2\} = \{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} \cup \{X_2 \leq x_1, X_1 \leq x_2\},$$

missä $x_1 < x_2$. Totea laskemalla, että $P(X_{(1)} \leq x_1, X_{(2)} \leq x_2) = 2F(x_1)F(x_2) - [F(x_1)]^2$, joka on $X_{(1)}$:n ja $X_{(2)}$:n yhteisjakauman kertymäfunktion arvo $F_{X_{(1)},X_{(2)}}(x_1, x_2)$.