Tilastollinen päättely I
4. harjoitukset, 6. vko 2012

4.1. Valitaan otos $X_1, \ldots, X_{18}$ jakaumasta, jonka tiheysfunktio on $f(x) = 1 - x/2,\ 0 \leq x \leq 2$.

(a) Laske jakauman keskiarvo ja varianssi.

(b) Laske todennäköisyyden $P(2/3 \leq \bar{X} \leq 5/6)$ likiarvo keskeistä rajaväittämää soveltaen.

4.2. Generoi tehtävän 1 jakaumasta 1000 kokoinen otos ja piirrä aineistosta histogrammi (R-funktio `hist`). (Vihje: Jos jakauman kertymäfunktio on F ja F^{-1} on F:n käänteisfunktio sekä $Y \sim \mathrm{Tas}(0, 1)$, niin $X = F^{-1}(Y)$ noudattaa jakaumaa, jonka kertymäfunktio).

4.3. Lantin heitossa kruunan todennäköisyys π on tuntematon. Todennäköisyyden estimoimiseksi heitetään lanttia 3000 kertaa ja $\hat{\pi}$ on kruunien suhteellinen osuus heittosarjassa. Laske Tšebyševin epäyhtälön avulla (Alaluku 9.6.1) alaraja todennäköisyydelle, että estimaatti $\hat{\pi}$ poikkeaa parametrin π oikeasta arvosta korkeintaan 0.03 (ts. arvioi todennäköisyyttä $P(|\hat{\pi} - \pi| < 0.03)$).

4.4. Jatkoa tehtävään 3 Keskeisen rajaväittämän nojalla voidaan sanoa, että $\hat{\pi}$ noudattaa jo melko tarkasti normaalijakaumaa. (a) Laske todennäköisyyden $P(|\hat{\pi} - \pi| < 0.03)$ alaraja, kun ja käytät normaalijakaumaan perustuvaa likiarvoa. (b) Heitetään `R`:llä lanttia 3000 kertaa, kun $\pi = 0.2$. Toistetaan koe 1000 kertaa. Montako kertaa $\hat{\pi}$ poikkeaa π:stä enemmän kuin 0.03.

4.5. Presidentinvaalin toisella kierroksella ehdokkaan A kannatusosuus on $0 < p < 1$. Valitaan äänioikeutetuista n:n henkilön otos. Halutaan varmistaa, että otoksesta laskettu A kannatusosuus poikkeaa todellisesta vähemmän kuin $0 < \epsilon < 1$ vähintään todennäköisyydellä 0.95 (Käytä keskeistä rajaväittämää).

(a) Kuinka suuri n on valittava?

(b) Kuinka suuri n tarvitaan, jos $\epsilon = 0.02$.

(c) Jos voidaan tehdä korkeintaan tuhannen henkilön otos, mihin tarkkuuteen voidaan päästä?

4.6. Satunnaismuuttuja X noudattaa binomijakaumaa $\mathrm{Bin}(100, 0.1)$. Laske todennäköisyyden $P(12 \leq X \leq 14)$ (a) tarkka arvo, (b) Poissonin jakaumaan perustuva likiarvo ja (c) normaalijakaumaan perustuva likiarvo (keskeinen rajaväittämä).

4.7. Elektronisen komponentin kestoaika Y_i noudattaa eksponenttijakaumaa Exp(100), missä 100 on jakauman keskiarvo. Kaksi komponenttia on kytketty rinnakkain systeemiksi. Systeemi siis lakkaa toimimasta kun kummatkin komponentit lakkaavat toimimasta. Systeemin kestoaika X on siksi $\max(Y_1, Y_2)$. Määritä Y:n tiheysfunktio $f_X(y)$ (Ks. alaluku 9.5.1).

4.8. Ylioppilaskokeessa erään kielikokeen keskiarvo oli 60 ja varianssi 64. Erään koulun 100 ylioppilasta saivat keskiarvon 57.9. Tuntuuko uskottavalta, että nämä 100 ylioppilasta ovat otos koko populaatista vai olisiko koulun taso keskitasoa huonompi? (Laske todennäköisyys, että otoksesta laskettu pistemäärä on korkeintaan 57.9, kun $n = 100$. Sovella keskeistä rajaväittämää).