Tilastollinen päättely I
3. harjoitukset, 5. vko 2012

3.1. Valitaan otos $X_1, \ldots, X_n$ eskponenttijakaumasta $\mathrm{Exp}(\theta)$ ($= \mathrm{Gamma}(1, \theta)$). Määritä satunnaismuuttujien $T_n = X_1 + \cdots + X_n$ ja $(1/n)T_n$ jakaumat. (Ks. Lause 9.5, Seuraus 9.1 ja Esimerkki 9.7)

3.2. Olkoon $X_1, \ldots, X_n$ otos jakaumasta, jonka odotusarvo on μ_1 ja $Y_1, \ldots, Y_m$ otos jakaumasta, jonka odotusarvo on μ_2. Otokset ovat toisistaan riippumattomat ja jakaumilla on sama varianssi σ^2.

(a) Määritä $E(\bar{X} - \bar{Y})$ ja $\mathrm{Var}(\bar{X} - \bar{Y})$, missä $\bar{X}$ ja $\bar{Y}$ ovat otoskeskiarvot.

(b) Olkoon $\mu_1 = \mu_2$, $n = m$ ja jakauma on normaalijakauma. Määritä pienin sellainen n:n arvo, että $P(|\bar{X} - \bar{Y}| > \sigma/4) \geq 0.68$.

3.3. Olkoot $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$ kolmen riippumattoman otoksen otoskeskiarvot ja otoskoot ovat vastaavasti n_1, n_2, n_3. Jokainen otos on normaalijakaumasta $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Määritä satunnaismuuttujien $V_1 = (1/3)(\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3)$ ja $V_2 = w_1\bar{X}_1 + w_2\bar{X}_2 + w_3\bar{X}_3)$ jakaumat, kun $w_i = n_i/(n_1 + n_2 + n_3)$. (Ks, Lauseet 9.6 ja 9.10)

3.4. Riippumattomat satunnaismuuttujat X, Y, W noudattavat normaalijakaumaa siten, että $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$, $Y \sim \mathrm{N}(1, 1)$ ja $W \sim \mathrm{N}(2, 4)$. Määritä sellainen luku a, että

$$P\Big\{\frac{X^2 + (Y-1)^2}{X^2 + (Y-1)^2 + (W-2)^2/4} > a\Big\} = 0.05.$$

(Ks. F-jakauma s. 254)

3.5. Valmistettavan paperilaadun vetolujuus noudattaa normaalijakaumaa $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Tuotannosta valmistetaan n näytearkkia (otos), joista mitataan vetolujuudet $Y_1, \ldots, Y_n$, otoskeskiarvo $\bar{Y}$ ja otosvarianssi S^2. Määritä todennäköisyys, että $\bar{Y}$ poikkeaa korkeintaan $2S/\sqrt{n}$ populaation todellisesta keskiarvosta μ. Mikä on todennäköisyyden numeerinen arvo, kun $n = 25$ (Ks. Studentin lause ja t-jakauma alaluku 9.3.2).

3.6. Olkoon $X_1, \ldots, X_{10}$ otos normaalijakaumasta $\mathrm{N}(\mu, 0.8)$ ($\sigma^2 = 0.8$). Määritä sellaiset positiiviluvut a ja b, että

$$P(a \leq S^2 \leq b) = 0.90,$$

missä S^2 on otosvarianssi. (Ks. Studentin lause)

3.7. Oletetaan, että T noudattaa t-jakaumaa vapausastein 10 ja $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

(a) Laske $\mathrm{Var}(T)$,

(b) $P(|T| \geq 2.228)$ ja $P(|Z| \geq 2.228)$

(c) $P(-0.260 < T < 2.764)$ ja $P(-0.260 < Z < 2.764)$.

(d) Piirrä samaan kuvioon T:n ja Z:n tiheysfunktion kuvaajat.

Miten luonnehtisit T:n ja Z:n jakaumien välistä eroa? (`R:Help/Manuals/Probability distributions` ja `funktio curve, parametri add=T`)

3.8. Oletetaan, että F noudattaa F-jakaumaa vapausastein 3 ja 10.

(a) Laske $E(F)$ ja $\mathrm{Var}(F)$,

(b) F:n mediaani sekä 25%:n ja 75%:n pisteet.

(c) Määritä a ja b siten, että $P(F \leq b) = 0.975$ ja $P(a < F \leq b) = 0.95$.

(d) Piirrä F:n kuvaaja.