

1.1. Rillä

par(mfrow = c(1,2)) # kuvaajat vierittäin

curve(dbinom(3, 0.3, x)) # a)

curve(x^3 * (1-x)^7) # b)

1.2. uskottavuusfunktion $L(\theta; 3)$ maksimi $L(\hat{\theta}; 3)$

$$L'(\theta; 3) = \binom{10}{3} 3\theta^2(1-\theta)^7 - 7(1-\theta)^6 = 0$$

$$\theta^2(1-\theta)^6 [3(1-\theta) - 7\theta] = 0$$

Toteutuu, kun $\theta=0$ tai $\theta=1$ tai $3(1-\theta) - 7\theta = 0$ eli $\theta = \frac{3}{10}$

$$\left. \begin{array}{l} L'(\theta) > 0, \text{ kun } \theta < \frac{3}{10} \\ L'(\theta) < 0, \text{ kun } \theta > \frac{3}{10} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{3}{10} \text{ maksimikohta}$$

$$L(\hat{\theta}) = \binom{10}{3} 0.3^3 0.7^7$$

$$l(\hat{\theta}) = \log \binom{10}{3} + 3 \log 0.3 + 7 \log 0.7$$

Piirrokset Rillä $n \leftarrow 10; x \leftarrow 3$ uf \leftarrow function(t) $t^x * (1-t)^{(n-x)}$

par(mfrow = c(1,2))

curve(uf(x)/uf(0.3), 0, 1) # normitettu uskottavuusf.

curve(log(uf(x)) - log(uf(0.3)), 0, 1) # logaritmoitu normitettu uf

1.3. $X_i \sim \text{Ber}(\theta), 0 \leq \theta \leq 1, i = 1, \dots, 15$

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_{15} = x_{15}; \theta) = \prod_{i=1}^{15} \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i}, x_i \in \{0, 1\}$$

$$= \theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{15 - \sum x_i} \quad \theta = 0.1$$

$$P(X_1=0, X_2=0, X_3=1, \dots, X_{15}=1; 0.1) = 0.1^7 0.9^8$$

Uskottavuusfunktion $L(\theta) = \theta^7 (1-\theta)^8$

maksimi?

$$L'(\theta) = 7\theta^6 (1-\theta)^8 - 8\theta^7 (1-\theta)^7 = \theta^6 (1-\theta)^7 [7(1-\theta) - 8\theta] = 0$$

toteutuu kun $\theta=0$ tai $\theta=1$ tai $7(1-\theta) - 8\theta = 0$ eli $\theta = \frac{7}{15}$

$$L''(\theta) < 0, \text{ kun } \theta = \frac{7}{15} \quad \hat{\theta} = \frac{7}{15}$$

Uskottavuusfunktion kuvaaja Rillä $n \leftarrow 15; x \leftarrow 7$ uf \leftarrow function(t) $t^x * (1-t)^{(n-x)}$

curve(uf(x), 0, 1)

1.4.

R:llä

nA ← 11037 ; xA ← 139 # aspiriiniyhmä

nL ← 11034 ; xL ← 239 # lumeryhmä

par(mfrow = c(2,1))

curve(dbinom(xA, nA, x), 0.005, 0.03, col = "red")

curve(dbinom(xL, nL, x), add = TRUE) # samaan kuvaajaan

thA ← 139/11037 # $\hat{\theta}_A$ annettu tehtävänannossa

curve(dbinom(xA, nA, x) / dbinom(xA, nA, thA)) # $L_A(\theta) / L_A(\hat{\theta}_A)$

1.5.

n ← nA + nL ; xY ← xA + xL # yhdistetty koko aineiston uskottavuusf.:

curve(dbinom(xA, nA, x), 0.005, 0.03, col = "red") # aspiriiniyhmä

curve(dbinom(xL, nL, x), add = T) # lumeryhmä

curve(dbinom(xY, n, x), add = T, col = "blue") # koko aineisto

1.6.

$$P(T|+) = \frac{P(+|T) \cdot P(T)}{P(+|T)P(T) + P(+|T^c) \cdot P(T^c)}$$

$$= \frac{0.95 \cdot p}{0.95 \cdot p + 0.02 \cdot (1-p)} \leq 0.001$$

missä taudin prioritodennäköisyys $P(T) = p$

$$\frac{0.95p}{0.93p + 0.02} \leq 0.001$$

$$0.95p \leq 0.001 \cdot 0.93p + 0.001 \cdot 0.02$$

$$(0.95 - 0.001 \cdot 0.93)p \leq 0.001 \cdot 0.02$$

$$p \leq \frac{0.001 \cdot 0.02}{0.95 - 0.001 \cdot 0.93} \approx 0.000021$$

Testin tulos

	+	-
On Tauti	0.95	0.05
Ei Tautia	0.02	0.98

1.7.

$$L\left(\frac{3}{4}; x\right) = f\left(x; \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{30-x} \cdot \binom{30}{x}$$

$$L\left(\frac{1}{4}; x\right) = f\left(x; \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{30-x} \cdot \binom{30}{x}$$

Uskottavuussuhde

$$\frac{L\left(\frac{3}{4}; x\right)}{L\left(\frac{1}{4}; x\right)} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{30-x}}{\left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{30-x}} = \dots = 3^{2x-30}$$

Binomijakauma

$$f(x; n; \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

$$\theta = \frac{3}{4}, n = 30$$

1.8.

$$P(3^{2x-30} \geq k) = 0.05$$

$$qbinom(0.05, 30, 0.25, lower.tail = F)$$

$$= 12 \text{ eli } x = 12$$

$$\therefore P(3^{2x-30} \geq k) = 0.05$$

$$x \geq 12 \Leftrightarrow \text{uskottavuussuhde} \geq k = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729} \approx 0.00137$$