Tilastollinen päättely I
1. harjoitukset, to 19.01.2012 (3. vko)
Pinni ls. B3118 12:15–13:45

1.1. Olkoon $X \sim \mathrm{Bin}(10, \theta)$. Havaitaan $X = 3$. Piirrä uskottavuusfunktio $L(\theta; 3)$ muodossa (a) $L(\theta; 3) = \binom{10}{3}\theta^3(1-\theta)^7$, (b) $L(\theta; 3) = \theta^3(1-\theta)^7$.

1.2. Määritä edellisen tehtävän tapauksessa uskottavuusfunktion $L(\theta; 3)$ maksimi $L(\hat{\theta}; 3)$ ja logaritmoidun uskottavuusfunktion maksimi $l(\hat{\theta}; 3)$. Piirrä normitettu uskottavuusfunktio $L(\theta; 3)/L(\hat{\theta}; 3)$ ja logaritmoitu normitettu uskottavuusfunktio $l(\theta; 3) - l(\hat{\theta}; 3)$.

1.3. Binäärinen signaali $X_i \sim \mathrm{Ber}(\theta), 0 \leq \theta \leq 1, i = 1, \ldots, 15$ noudattaa Bernoullin jakaumaa. Mikä on todennäköisyys, että signaalijono $X_1, \ldots, X_{15}$ saa arvon 001001101011001, kun satunnasimuuttujat ovat riippumattomia ja $\theta = 0.1$? Miten todennäköisyys muuttuu, kun θ:n arvo muuttuu? Piirrä funktio (uskottavuusfunktio). Määritä funktion maksimi.

1.4. Tarkastellaan Esimerkin 8.1 aspiriinitutkimusta (Alaluku 8.1, Aspiriiniaineisto, Taulukko 8.2). Oletetaan, että infarktien lukumäärä X noudattaa binomijakaumaa $\mathrm{Bin}(\theta, n)$. Piirrä binomijakauman (a) uskottavuusfunktio $L_a(\theta)$, kun havaitaan $X = 139$ ja $n = 11037$ (aspiriiniryhmä), (b) uskottavuusfunktio $L_l(\theta)$, kun havaitaan $X = 239$ ja $n = 11034$ (lumeryhmä) ja (c) uskottavuussuhde $L_l(\theta)/L_a(\hat{\theta}_a)$, missä $\hat{\theta}_a = 139/11037$. Mitä päättelet aspiriinin vaikutuksesta?

1.5. Tarkastellaan edelleen Taulukon 8.2 (Alaluku 8.1) aspiriiniaineistoa. Oletetaan, että hypoteesi $H_0 : \theta_A = \theta_L = \theta$ pitäisi paikkansa (Aspiriini- ja lumeryhmissä sama infarktitodennäköisyys). Piirrä θ:n uskottavuusfunktio, kun oletetaan H_0 (kaikki havainnot samasta populaatiosta). Vertaa tätä uskottavuusfunktiota edellisessä tehtävässä määritettyihin aspiriini- ja lumeryhmän uskottavuusfunktioihin.

1.6. Tarkastellaan Esimerkkiä 8.1 ja Taulukkoa 8.1. Kuinka suuri taudin T prioritodennäköisyys voi korkeintaan olla, jotta $P(T|+) \leq 0.001$?

1.7. Tehdään 30 riippumatonta Bernoullin koetta. Onnistumisten lukumäärä X noudattaa Binomijakaumaa $\mathrm{Bin}(30, \theta)$. Olkoon $H_0 : \theta = \frac{1}{4}$ ja vaihtoehtoinen hypoteesi $H_1 : \theta = \frac{3}{4}$. Havaitaan $X = x$ onnistumista. (a) Määritä uskottavuussuhde $L(3/4; x)/L(1/4; x)$

1.8. Määritellään Tehtävän 7 uskottavuussuhteen avulla joukko $C = \{x | L(3/4; x)/L(1/4; x) \geq k\}$. Valitaan H_1, jos uskottavuussuhde on ainakin k. Määritä k siten, että todennäköisyys valita H_1 on 0.05, jos H_0 on tosi.