MTTTP5, luento 8.11.2018

3.5.5 Normaalijakauma

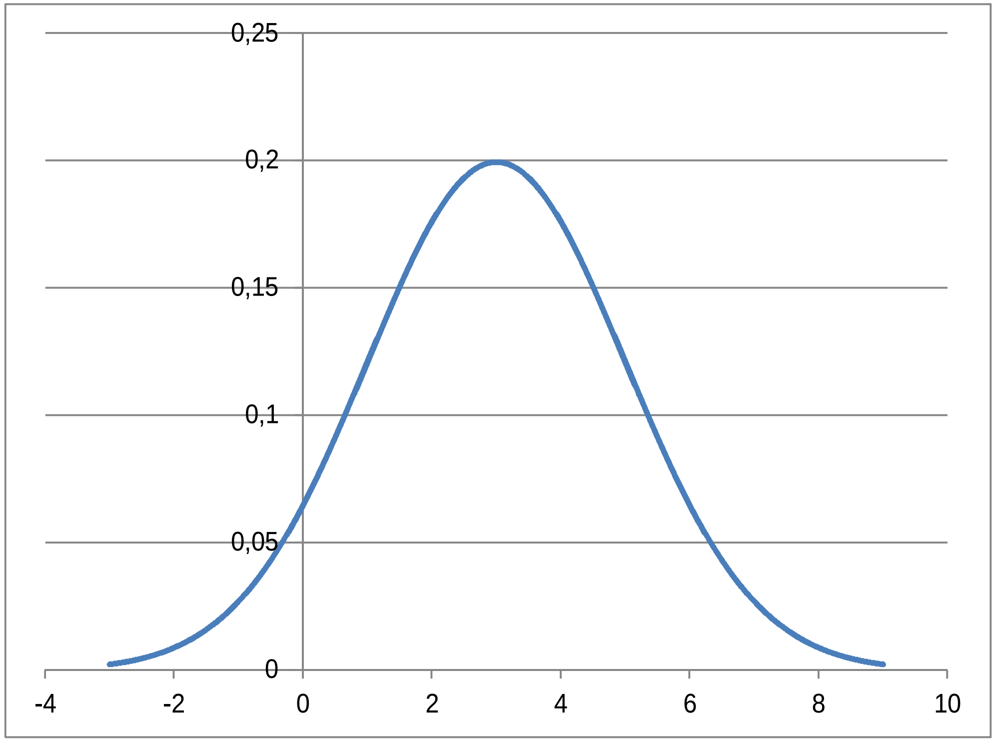
Satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa parametrein μ ja σ^2, jos sen tiheysfunktio on

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , -\infty < x < \infty.$$

Merk. X ~ N(μ, σ^2)

$$E(X) = \mu, Var(X) = \sigma^2$$

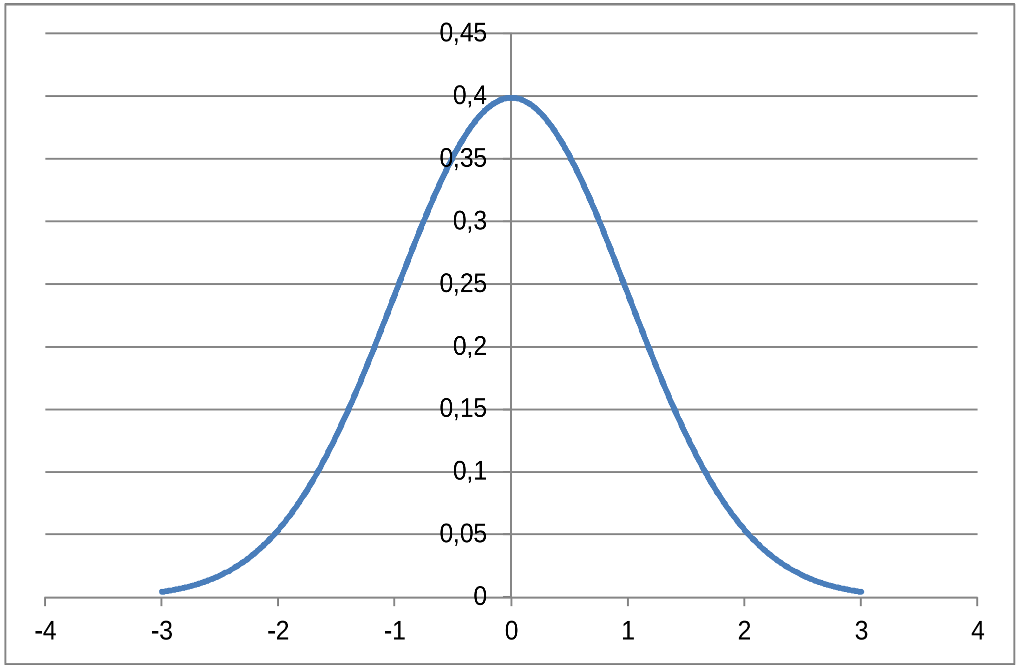
Esim. $N(3, 4)$



Esim. Parametrien vaikutus jakauman muotiin,
http://vassarstats.net/zsamp.html

Jos X ~ N(0, 1), niin kyse standardoidusta normaalijakaumasta. Tällöin

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$



Merkitään $Z \sim N(0, 1)$

- tiheysfunktio $\phi(z)$
- kertymäfunktio $\Phi(z)$

$$P(Z \leq z) = \Phi(z)$$

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Kertymäfunktion arvoja on taulukoitu, ks. taulukko

http://www.sis.uta.fi/tilasto/mtttp5/syksy2018/N(0_1).pdf

Esim. 3.5.7 $Z \sim N(0, 1)$

$P(Z \leq 1) = \Phi(1) = 0{,}8413$

$P(Z \leq 1{,}1) = \Phi(1{,}1) = 0{,}8643$

$P(Z \leq 1{,}14) = \Phi(1{,}14) = 0{,}8729$

$P(Z \leq -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

$P(Z \geq 2{,}4) = 1 - P(Z \leq 2{,}4) = 1 - \Phi(2{,}4) = 1 - 0{,}9918$

$= 0{,}0082$

$$P(Z \geq -1{,}14) = 1 - P(Z \leq -1{,}14) = 1 - \Phi(-1{,}14)$$

$$= 1 - (1 - \Phi(1{,}14)) = \Phi(1{,}14)$$

$$= 0{,}8729$$

$$P(-1 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \ldots = 0{,}6826$$

$$P(-2 \leq Z \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = \ldots = 0{,}9544$$

$$P(-3 \leq Z \leq 3) = \Phi(3) - \Phi(-3) = \ldots = 0{,}9974$$

Esim. 3.5.8 $Z \sim N(0, 1)$

Jos $\Phi(z) = 0{,}75$, niin $z \approx 0{,}67$, koska $\Phi(0{,}67) = 0{,}7486$

Jos $\Phi(z) = 0{,}26$, niin $\Phi(-z) = 1 - 0{,}26 = 0{,}74$, $-z \approx 0{,}64$,

koska $\Phi(0{,}64) = 0{,}7389$, $z = -0{,}64$.

Ks. http://www.sis.uta.fi/tilasto/mtttp2/syksy2012/norm_graaf.pdf

Jos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, niin $Z = (X - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$.

- $P(X \leq a) = P((X - \mu)/\sigma \leq (a - \mu)/\sigma)$

  $= \Phi((a - \mu)/\sigma)$

- $P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a)$

  $= 1 - P((X - \mu)/\sigma \leq (a - \mu)/\sigma)$

  $= 1 - \Phi((a - \mu)/\sigma)$

- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$

  $= \Phi((b - \mu)/\sigma) - \Phi((a - \mu)/\sigma)$

Esim. 3.5.9 Sinulla on sijoitusvaihtoehdot A ja B. Oletat, että sijoitusten tuottoprosentit noudattavat normaalijakaumaa odotusarvoina 10,4 ja 11,0 sekä hajontoina 1,2 ja 4,0. Haluat tehdä sijoituksen, jolla on todennäköisempää saada vähintään 10 %:n tuotto. Kumman sijoitusvaihtoehdon valitset ja miksi?

Merkitään

X = tuotto sijoituksesta A, $X \sim N(10{,}4,\ 1{,}2^2)$

Y = tuotto sijoituksesta B, $Y \sim N(11{,}0,\ 4{,}0^2)$

$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10)$$
$$= 1 - P((X - 10{,}4)/1{,}2 \leq (10 - 10{,}4)/1{,}2)$$
$$= 1 - \Phi(-0{,}33)$$
$$= 1 - (1 - \Phi(0{,}33))$$
$$= 0{,}6293$$

$$P(Y > 10) = 1 - P(Y \leq 10)$$
$$= 1 - P((Y - 11)/4 \leq (10 - 11)/4)$$
$$= 1 - \Phi(-0{,}25) = 1 - (1 - \Phi(0{,}25)) = 0{,}5987.$$

Valitset sijoitusvaihtoehto A, koska siinä suurempi todennäköisyys saada vähintään 10 % tuotto.

Esim. Matti valmistaa tehtaassa erästä komponenttia. Ilman häiriötekijöitä Matin tekemien komponenttien pituus vaihtelee normaalijakauman, jonka odotusarvo on 2,500 cm ja keskihajonta 0,005 cm, mukaisesti. Eräänä päivänä Matti oli hieman väsynyt. Työpäivän lopussa hän valitsi satunnaisesti yhden tämän päivän aikana tekemänsä komponentin, jonka pituus oli 2,493 cm.

a) Laske todennäköisyys sille, että ko. päivän aikana Matin tekemien komponenttien joukosta satunnaisesti valitun komponentin pituus on pienempi kuin Matin valitseman, jos oletetaan, että päivän aikana tehtyjen komponenttien pituuden vaihtelussa ei ole tapahtunut tavanomaisesta poikkeavaa muutosta.

Olkoon X = komponentin pituus, joka tavanomaisessa tilanteessa noudattaa normaalijakaumaa odotusarvona 2,500 ja keskihajontana 0,005.

Tällöin

$$P(X \leq 2{,}493) = \Phi((2{,}493 - 2{,}500)/0{,}005)$$
$$= \Phi(-1{,}4) = 1 - \Phi(1{,}4)$$
$$= 1 - 0{,}9192 = 0{,}0808.$$

b) Oliko Matin väsymys vaikuttanut työn laatuun? Valittaessa satunnaisesti yksi Matin tekemistä komponenteista, niin tavanomaisessa tilanteessa on siis n. 8,1 % todennäköisyys saada komponentti, joka on 2,493 cm lyhyempi. Ei siis ole mitenkään harvinaista, että saadaan komponentti, joka on pituudeltaan alle Matin valitseman komponentin. Näin päätellään, että Matin väsymys ei ole vaikuttanut työn laatuun. (Jos kuitenkin pitää laskettua todennäköisyyttä pienenä, niin tekee päinvastaisen päättely, mutta tällöin kiinnitetään riskitaso, joka on suurempi kuin 0,0808!)

Esim. Oletetaan, että sähkölamppujen käyttöikä X (tunteina) noudattaa normaalijakaumaa parametrein 800 ja 1600.

a) Laske todennäköisyys sille, että satunnaisesti valitun lampun käyttöikä on alle 850 mutta yli 700.

$P(700 \leq X \leq 850)$

$= \Phi((850 – 800)/40) - \Phi((700 – 800)/40)$

$= \Phi(5/4) - \Phi(-10/4) = \Phi(1{,}25) – (1 - \Phi(2{,}5))$

$= 0{,}8944 – (1 – 0{,}9938) = 0{,}8882$

b) 25 % valmistajan lampuista kestää yli a tuntia eli $P(X \geq a) = 0{,}25$. Määritä a.

Nyt $P(X < a) = 0{,}75$, joten $\Phi((a - 800)/40) = 0{,}75$. Taulukosta $\Phi(0{,}67) = 0{,}7486$, joten $(a - 800)/40 \approx 0{,}67$. Tästä $a = 826{,}8$.