MTTTP5, luento 6.11.2018

3.5 Joitain todennäköisyysjakaumia

3.5.1 Bernoulli-jakauma

Tarkastellaan satunnaisilmiötä, jossa joko onnistutaan (A) tai epäonnistutaan (A^C). Määritellään satunnaismuuttuja X siten, että

$$X = \begin{cases} 1, & \textit{jos onnistutaan} \\ 0, & \textit{jos epäonnistutaan} \end{cases}$$

Olkoon lisäksi P(A) = P(X = 1) = p, P(A^C) = P(X = 0) = 1 - p.

Sanotaan, että X noudattaa Bernoulli-jakaumaa parametrilla p, merk. X ~ Ber(p).

Tällöin E(X) = p, Var(X) = p(1 - p), ks. luento 30.10.

Esim. 3.5.1 Rahanheitto, veikkauksessa yhden kohteen arvaaminen, nopanheitossa silmäluvun 6 saaminen.

Esim. Heitetään noppaa. Määritellään X siten, että

$$X = \begin{cases} 1, & jos\ silmäluku\ 6 \\ 0, & muulloin \end{cases}$$

Siis P(X = 1) = 1/6, P(X = 0) = 5/6, X ~ Ber(1/6).

E(X) = $\frac{1}{6}$, Var(X) = $\frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{6}\right)$

3.5.2 Binomijakauma

Toistetaan n kertaa satunnaisilmiötä, jossa onnistumisen todennäköisyys on p.

Määritellään X = onnistumisten kokonaislukumäärä.

Tällöin sanotaan, että X noudattaa binomijakaumaa parametrein n ja p, merk. X ~ Bin(n, p).

Jos X ~Bin(n, p), niin

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \ldots n$$

Graafisesti http://vassarstats.net/

Binomijakautunut satunnaismuuttuja

$X = X_1 + X_2 + ... + X_n$, missä $X_i \sim Ber(p)$

$E(X_i) = p$, $Var(X_i) = p(1-p)$

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + ... + X_n)$$

$$= E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n) = np$$

$$Var(X) = Var(X_1 + X_2 + ... + X_n)$$

$$= Var(X_1) + Var(X_2) + ... + Var(X_n) = np(1 - p)$$

Esim. Heitetään noppaa 10 kertaa. Määritellään
X = silmäluvun 6 kokonaislukumäärä heittosarjassa

X ~ Bin(10, 1/6), $E(X) = 10 \cdot \frac{1}{6}$, $Var(X) = 10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$

$$P(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{10-k}, k = 0, 1, 2, \ldots 10$$

k	P(X = k)
0	0,161506
1	0,323011
2	0,29071
3	0,155045
4	0,054266
5	0,013024
6	0,002171
7	0,000248
8	1,86E-05
9	8,27E-07
10	1,65E-08

Kuvaaja: http://homepage.stat.uiowa.edu/~mbognar/applets/bin.html

Esim. 3.5.2 Vakioveikkaus, X = oikein arvattujen kohteiden kokonaislukumäärä, X ~Bin(13, 1/3), E(X) = $13 \cdot \frac{1}{3}$, Var(X) = $13 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$

$$P(X = k) = \binom{13}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{13-k}, k = 0, 1, 2, \ldots 13$$

$$P(X = 0) = \binom{13}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{13-0} = \left(\frac{2}{3}\right)^{13}$$

$$P(X = 1) = \binom{13}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{13-1} = 13\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{12}$$

$$P(X = 2) = \binom{13}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{13-2} = 78\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{11}$$

$$P(X = 3) = \binom{13}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{13-3} = 286\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$$

$$= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3))$$

$$\approx 0{,}6776$$

$$P(X = 12) = \binom{13}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{12}\left(\frac{2}{3}\right)^{13-12} = 13\left(\frac{1}{3}\right)^{12}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$P(X = 13) = \binom{13}{13}\left(\frac{1}{3}\right)^{13}\left(\frac{2}{3}\right)^{13-13} = \left(\frac{1}{3}\right)^{13}$$

$$P(X > 11) = P(X = 12) + P(X = 13)$$

$$= 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{13} \approx 0{,}0000169$$

Esim. 3.5.3 Pelaat peliä, jossa heitetään rahaa. Jos tulee klaava, saat ystävältäsi euron, jos tulee kruuna, annat ystävällesi euron. Rahaa on heitetty 20 kertaa, ja olet tappiolla 14 euroa. Onko raha harhaton?

X = klaavojen lukumäärä heittosarjassa, X ~Bin(20, ½)

$$P(X = k) = \binom{20}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{20-k} = \binom{20}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{20},$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, 20$$

X – (20 –X) = -14, josta X = 3. Klaavoja on tullut 3.

$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$$= \left[\binom{20}{0} + \binom{20}{1} + \binom{20}{2} + \binom{20}{3}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 1351\left(\frac{1}{2}\right)^{20} \approx 0{,}0013$$

Tämä on harvinaista, joten voidaan päätellä, että raha ei ole harhaton.

Ks. laskuri http://stattrek.com/online-calculator/binomial.aspx

3.5.3 Diskreetti tasajakauma

Esim. Nopanheitossa X = silmäluku, P(X = 1) = P(X = 2) =...= P(X = 6) = 1/6. Sanotaan, että X noudattaa diskreettiä tasajakaumaa välillä (1, 6), merk. X ~ Tasd(1, 6).

Olkoon satunnaismuuttujan X arvot

a, a + 1, a + 2, ..., a + (n-1) = b ja kukin n:stä arvosta yhtä todennäköinen. Sanotaan, että X noudattaa diskreettiä tasajakaumaa välillä (a, b), merk. X ~ Tasd(a, b).

Tällöin $E(X) = \frac{a+b}{2}, Var(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

Esim. 3.5.4 Olkoon X yksinumeroinen satunnaisluku. Mahdolliset arvot 0, 1, 2, ..., 9 sekä jokaisen arvon todennäköisyys 1/10, siis $X \sim \mathrm{Tasd}(0, 9)$. $E(X) = (0+9)/2$, $\mathrm{Var}(X) = (10^2-1)/12$.

3.5.4 Jatkuva tasajakauma

Satunnaismuuttuja X noudattaa jatkuvaa tasajakaumaa välillä (a, b), jos sen tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & muulloin \end{cases}$$

Merk. X ~ Tas(a, b)

Tällöin $E(X) = \frac{a+b}{2}, Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Esim. $X \sim \text{Tas}(1, 3)$

$f(x) = 1/(3-1) = 1/2$

$F(x) = P(X \leq x) = (x-1)/2$

$E(X) = (1+3)/2 = 2$

$\text{Var}(X) = (3-1)^2/12 = 1/3$

Esim. $X \sim \text{Tas}(0, 1)$, luento 30.10.

$X \sim \text{Tas}(0, 4)$, luento 30.10.

$X \sim \text{Tas}(-1, 1)$, harj. 2 teht. 2.