MTTTP5, luento 1.11.2018

Kertausta

- X diskreetti satunnaismuuttuja

$$P(X = x_i) = p_i, i = 1,2, \dots, k, \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

- X jatkuva satunnaismuuttuja

f(x) tiheysfunktio, f(x) ≥ 0, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

- Kertymäfunktio $F(x) = P(X \leq x)$

$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$, $a < b$

Jos X jatkuva, niin $P(X \leq a) = P(X < a) = F(a)$

$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$

- Odotusarvo

$$\mu = E(X) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} p_i x_i \text{ , } kun\ X\ diskreetti \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \text{ , } kun\ X\ jatkuva \end{cases}$$

- Varianssi

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X - \mu)^2 = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} p_i (x_i - \mu)^2 \text{ , } kun\ X\ diskreetti \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x - \mu)^2 dx, kun\ X\ jatkuva \end{cases}$$

Esim.

Satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat 1, 2 ja 3 sekä

P(X = 1) = 1-2p, P(X = 2) = P(X = 3) = p, 0≤ p ≤½.

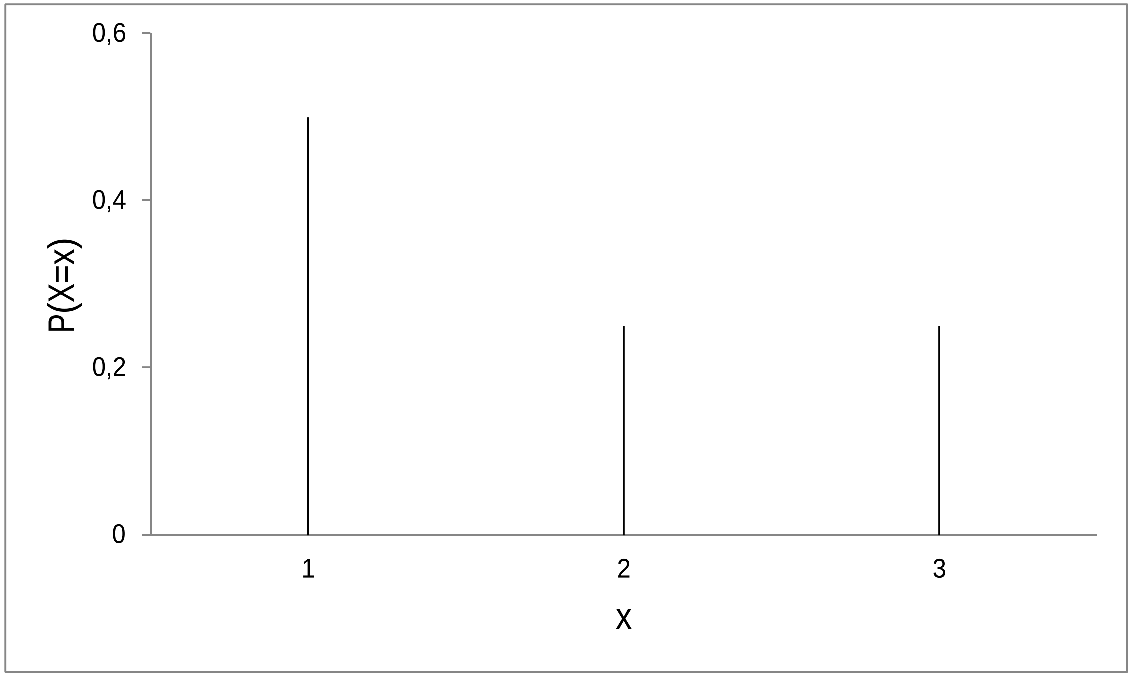
Laske E(X), Var(X). Piirrä X:n todennäköisyysjakauman kuvaaja, kun p = 0,25.

$$E(X) = 1 \cdot (1 - 2p) + 2 \cdot p + 3 \cdot p = 3p + 1$$

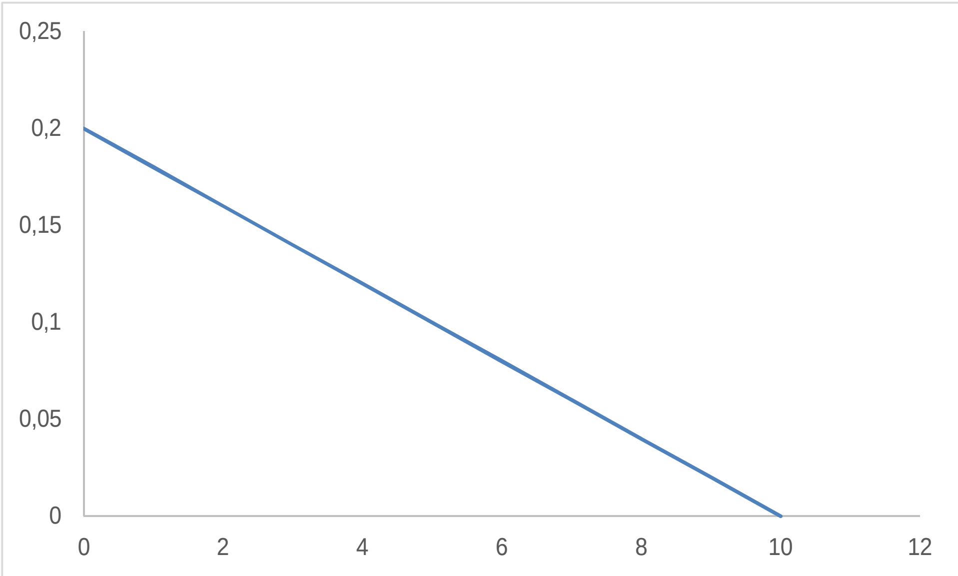
$$Var(X) = (1 - 3p - 1)^2 \cdot (1 - 2p) + (2 - 3p - 1)^2 \cdot p$$

$$+ (3 - 3p - 1)^2 \cdot p = \cdots = -9p^2 + 5p$$

Jos p = 0,25, niin P(X = 1) = 0,5, P(X = 2) = P(X = 3) = 0,25.
Graafisesti:



Esim. Henkilö A saapuu bussipysäkille. Hän joutuu mahdollisesti odottamaan bussia. Määritellään X = odotusaika minuutteina. Oletetaan, että X:n tiheysfunktio on $f(x) = 0{,}02(10-x)$, $0 \le x \le 10$. Tiheysfunktion kuvaaja on laskeva suora, kaksi pistettä suoralta $f(0)=0{,}2$, $f(10)=0$.



Kertymäfunktio $F(x) = P(X \leq x)$. Tämä voidaan laskea kolmion pinta-alaa hyödyntäen

$$
\begin{aligned}
F(x) &= P(X \leq x) \\
&= 1 - P(X > x) \\
&= 1 - (10-x)\, f(10-x)/2 \\
&= -0{,}01x^2 + 0{,}2x.
\end{aligned}
$$

Todennäköisyys sille, että A joutuu odottamaan yli 9 minuuttia, on

$$P(X > 9) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - F(9) = 0{,}01.$$

ks. http://www.sis.uta.fi/tilasto/mtttp2/syksy2013/luentoesimerkki_31_10_13.pdf

Jos E(X) = μ ja Var(X) = σ^2, niin X standardoidaan tekemällä muunnos

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

3.4 Odotusarvon ja varianssin ominaisuuksia

Odotusarvon ominaisuuksia

- $E(a) = a, a\ vakio$
- $E(aX + b) = aE(X) + b, a\ ja\ b\ vakioita$
- $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$

Satunnaismuuttujien riippumattomuus määritellään vastaavalla tavalla kuin tapahtumien riippumattomuus.

Varianssin ominaisuuksia

- $Var(a) = 0, a\ vakio$
- $Var(aX + b) = a^2 Var(X), a\ ja\ b\ vakioita$
- $Hajonta: Sd(aX + b) = |a| Sd(X), a\ ja\ b\ vakioita$
- $Jos\ X_1, X_2, \dots, X_n\ riippumattomia, niin\ Var(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \dots + Var(X_n)$

Esim. 3.4.4 Sijoitat 1000 euroa. Mahdolliset kohteet A ja B, joissa molemmissa pienin sijoitusmäärä 500 euroa.

Merkitään X = tuotto 100 euron sijoituksesta kohteeseen A,

Y = tuotto 100 euron sijoituksesta kohteeseen B

Oletetaan P(X = -5) = 0,4, P(X = 20) = 0,6

P(Y= 0) = 0,6, P(Y = 25) = 0,4.

$E(X) = -5 \cdot 0{,}4 + 20 \cdot 0{,}6 = 10$

$E(Y) = 0 \cdot 0{,}6 + 25 \cdot 0{,}4 = 10$

$\mathrm{Var}(X) = (-5 - 10)^2 \cdot 0{,}4 + (20 - 10)^2 \cdot 0{,}6 = 150$

$\mathrm{Var}(Y) = (0 - 10)^2 \cdot 0{,}6 + (25 - 10)^2 \cdot 0{,}4 = 150$

Miten sijoitat?

Mahdolliset vaihtoehdot ja niiden tuotot W

1. 1000 euroa A:han, $W = 10X$

   $E(W) = 10E(X) = 100$, $Var(W) = 10^2 Var(X) = 15000$

2. 1000 euroa B:hen, $W = 10Y$

   $E(W) = 10E(Y) = 100$, $Var(W) = 10^2 Var(Y) = 15000$

3. 500 euroa kumpaankin, $W = 5X + 5Y$

   $E(W) = E(5X + 5Y) = E(5X) + E(5Y) = 100$

   $Var(W) = Var(5X + 5Y) = Var(5X) + Var(5Y) = 5^2 Var(X) + 5^2 Var(Y) = 7500$

Vaihtoehto 3 paras, koska pienin vaihtelu (riski).

Esim. Sijoitat kohteeseen A 500 euroa ja kohteeseen B 1000 euroa.

Olk. X = tuotto euron sijoituksesta kohteeseen A

Y = tuotto euron sijoituksesta kohteeseen B.

Oletetaan tuottojen olevan toisistaan riippumattomia ja $E(X) = E(Y) = \mu$, $Var(X) = Var(Y) = \sigma^2$. Määritä koko 1500 euron tuoton odotusarvo ja varianssi.

Kokonaistuotto $W = 500X + 1000Y$

$E(W) = E(500X + 1000Y) = E(500X) + E(1000Y) = 500E(X) +$
$1000E(Y) = 500\mu + 1000\mu = 1500\mu$

$Var(W) = Var(500X + 1000Y) = Var(500X) + Var(1000Y) =$
$500^2Var(X) + 1000^2Var(Y) = 500^2\sigma^2 + 1000^2\sigma^2 = 1250000\sigma^2$

Esim. 3.4.5

Sijoitat 1000 euroa. Mahdolliset kohteet A ja B.

X = 1 euron tuotto sijoituksesta kohteeseen A

Y = 1 euron tuotto sijoituksesta kohteeseen B

X ja Y riippumattomia

$E(X) = E(Y) = \mu$, $Var(X) = Var(Y) = \sigma^2$.

Miten sijoitat?

Sijoitetaan α euroa kohteeseen A ja $(1000-\alpha)$ kohteeseen B

Tuotto $W = \alpha X + (1000-\alpha)Y$

$$E(W) = E(\alpha X + (1000-\alpha)Y)$$

$$= E(\alpha X) + E((1000-\alpha)Y) = \alpha E(X) + (1000-\alpha)E(Y)$$

$$= 1000\mu$$

$$Var(W) = Var(\alpha X + (1000-\alpha)Y)$$

$$= Var(\alpha X) + Var((1000-\alpha)Y)$$

$$= \alpha^2 Var(X) + (1000-\alpha)^2 Var(Y)$$

$$= (2\alpha^2 - 2000\alpha + 1000000)\sigma^2$$

Pienin varianssi, kun $\alpha = 500$

Esim. 3.4.1

$$E(X) = \mu, Var(X) = \sigma^2, Z = \frac{X - \mu}{\sigma}, E(Z) = 0, Var(Z) = 1.$$

Esim. 3.4.2 Olkoot X ja Y riippumattomia,

$E(X) = \mu_X$, $E(Y) = \mu_Y$, $Sd(X) = \sigma_X$, $Sd(Y) = \sigma_Y$.

Määritellään Z = X – Y.

$E(Z) = E(X - Y) = E(X) - E(Y) = \mu_X - \mu_Y$

$Var(Z) = Var(X - Y) = Var(X) + Var(-Y)$

$= Var(X) + (-1)^2 Var(Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$

Z:n hajonta $\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$

Esim. 3.4.3

$Olkoot\ X_1, X_2, \ldots, X_n\ riippumattomia\ ja$

$$E(X_i) = \mu, Var(X_i) = \sigma^2, m\ddot{a}\ddot{a}ritell\ddot{a}\ddot{a}n\ Y = \frac{X_1 + X_2 + \cdots X_n}{n}.$$

$$E(Y) = \mu, Var(Y) = \frac{\sigma^2}{n}$$