MTTTP5, luento 30.10.2018

Luku 3
Todennäköisyysjakaumia

3.1 Satunnaismuuttuja ja todennäköisyysjakauma

Esim. 3.1.1 Satunnaisilmiö nopanheitto,
satunnaismuuttuja X = saatu silmäluku,
$P(X = 1) = P(X = 2) = \ldots = P(X = 6) = 1/6$

Esim. 3.1.2 Satunnaisilmiö neljän kolikon heitto,
satunnaismuuttuja X = klaavojen lukumäärä heittosarjassa,
$P(X = 0) = 1/16$, $P(X = 1) = 4/16$, $P(X = 2) = 6/16$, $P(X = 3) = 4/16$, $P(X = 4) = 1/16$

- Satunnaismuuttuja X on funktio, joka liittää yksikäsitteisen reaaliluvun jokaiseen tarkasteltavan satunnaisilmiön perusjoukon tulokseen.
- Tarkastellaan eri tulosten arvojen todennäköisyyksiä, jolloin saadaan satunnaismuuttujan todennäköisyysjakauma.
- Satunnaismuuttuja voi olla jatkuva tai diskreetti.
- Funktiota, joka määrittää satunnaismuuttujan todennäköisyysjakauman, kutsutaan tiheysfunktioksi, merk. $f(x)$.
- Satunnaismuuttujan X kertymäfunktio $F(x) = P(X \leq x)$.

Esim. Vakioveikkaus

X = oikein veikattujen kohteiden lukumäärä

$$F(0) = P(X \leq 0) = P(X = 0)$$

$$= 2^{13}/3^{13} = 8192/1594323$$

$$F(5) = P(X \leq 5)$$

$$= P(X = 0) + P(X = 1) + ... + P(X = 5)$$

Kertymäfunktion ominaisuuksia

- $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$, $a < b$
- Jos X jatkuva, niin $P(X \leq a) = P(X < a) = F(a)$
- $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
- Jos X jatkuva, niin $F'(x) = f(x)$

3.2 Diskreetti satunnaismuuttuja

Olkoon diskreetin satunnaismuuttujan X arvot $x_1, x_2, \ldots$, ja näiden arvojen todennäköisyydet $p_1, p_2, \ldots$

Satunnaismuuttujan X todennäköisyysjakauma määritellään pistetodennäköisyyksien

$$P(X = x_i) = \begin{cases} p_i, & i = 1, 2, \ldots, \text{missä } p_1 + p_2 + \cdots = 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

perusteella.

Määritellään odotusarvo

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_kx_k = \mu$$

ja varianssi

$$\mathrm{Var}(X) = E(X - \mu)^2$$

$$= p_1(x_1 - \mu)^2 + p_2(x_2 - \mu)^2 + ... + p_k(x_k - \mu)^2$$

$$= \sigma^2$$

Varianssin neliöjuuri σ on keskihajonta.

Esim. 3.2.2 Nopanheitto, satunnaismuuttuja X = saatu silmäluku, X:n todennäköisyysjakauma

$P(X = 1) = P(X = 2) = \ldots = P(X = 6) = 1/6$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$$

$$\mathrm{Var}(X) = (1 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + (6 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{12}$$

Esim. X = klaavojen lukumäärä neljän kolikon heitossa

X:n todennäköisyysjakauma:

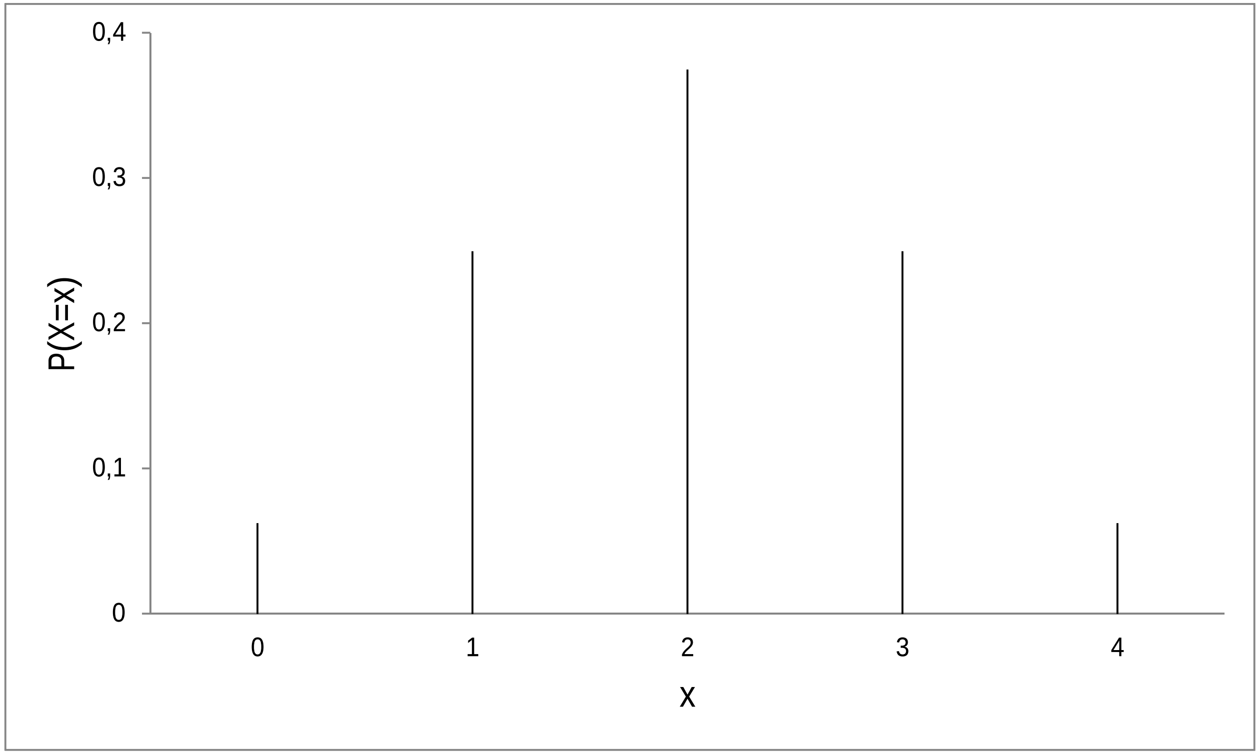
P(X = 0) = 1/16, P(X = 1) = 4/16, P(X = 2) = 6/16,

P(X = 3) = 4/16, P(X= 4) = 1/16

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + \cdots + 4 \cdot \frac{1}{16} = 2$$

$$Var(X) = (0-2)^2 \cdot \frac{1}{16} + (1-2)^2 \cdot \frac{4}{16} + \cdots + (4-2)^2 \cdot \frac{1}{16} = 1$$

Jakauma graafisesti:



Esim. Satunnaiskokeessa onnistutaan todennäköisyydellä p ja epäonnistutaan todennäköisyydellä 1 – p. Määritellään satunnaismuuttuja

$$X = \begin{cases} 1, & \text{jos onnistutaan} \\ 0, & \text{jos epäonnistutaan} \end{cases}$$

Siis $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$.

$E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$

$Var(X) = (1 - p)^2 \cdot p + (0 - p)^2 \cdot (1 - p) = p(1 - p)$

Vrt. esim. 3.2.3.

3.3 Jatkuva satunnaismuuttuja

Olkoon f(x) jatkuvan satunnaismuuttujan X tiheysfunktio. Tällöin f(x)$\geq$ 0 sekä f(x):n ja x-akselin väliin jäävä pinta-ala on yksi.

Määritellään X:n odotusarvo

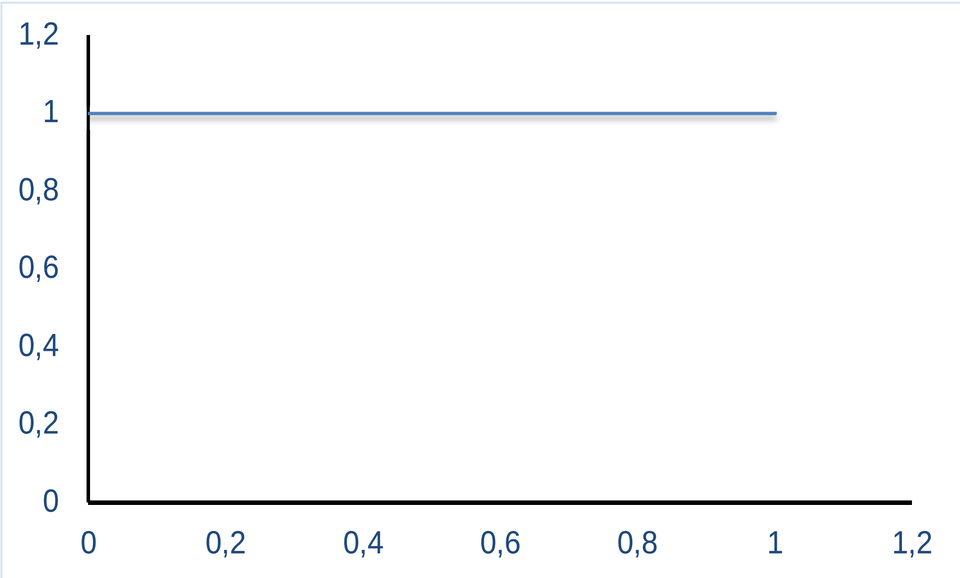
$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \mu$$

ja varianssi

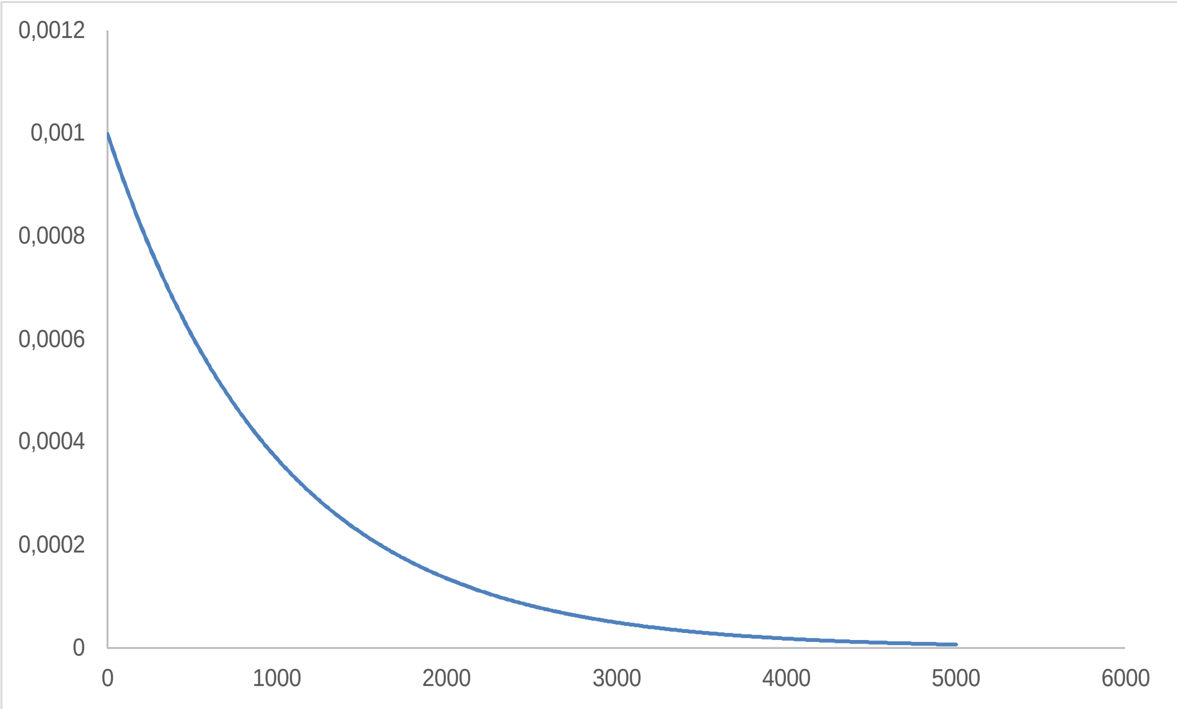
$$Var(X) = E(x - \mu)^2 = \sigma^2$$ ks. kaava (3.4)

X:n keskihajonta on σ.

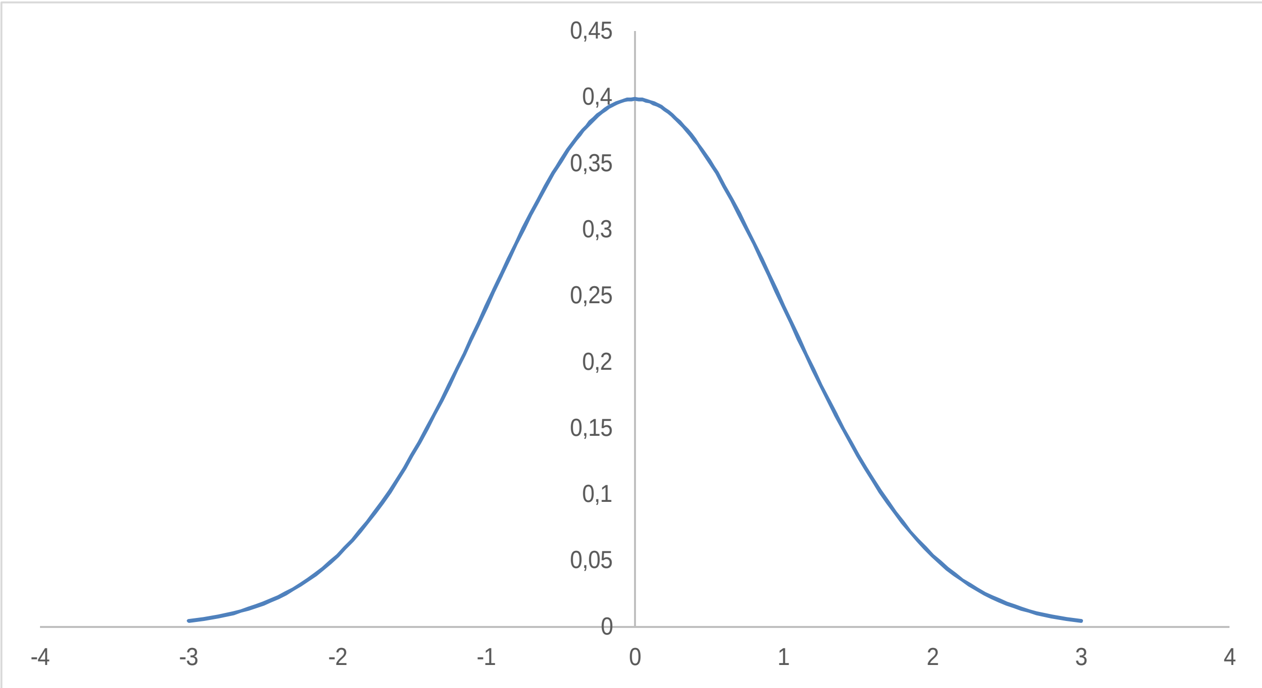
Esim. $f(x) = 1$, kun $0 \leq x \leq 1$



Esim. $f(x) = 0{,}001e^{-0{,}001x}, x \geq 0$

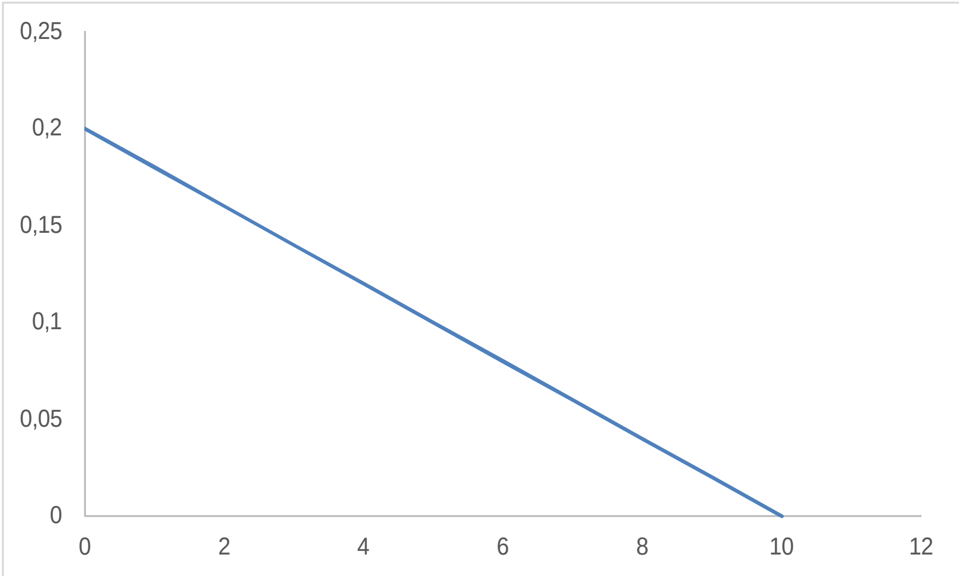


Esim. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

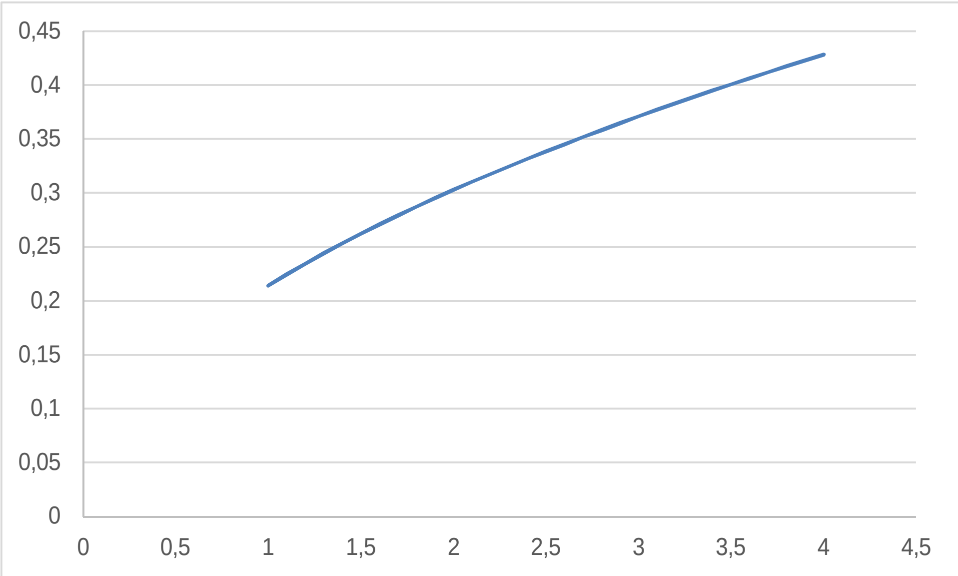


Kyseessä standardoidun normaalijakauman tiheysfunktio (ks. luentomoniste s. 22)

Esim. $f(x) = 0{,}02(10-x),\ 0 \leq x \leq 10$



Esim. $f(x) = \frac{3}{14}\sqrt{x}$, kun $1 \leq x \leq 4$.



Olkoot a ja b reaalilukuja ($a \leq b$). Tällöin

- $P(X \leq a) = F(a)$
- $P(X \geq a) = 1 - F(a)$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$

Esim. $f(x) = 1/4$, kun $0 \leq x \leq 4$

$F(x) = P(X \leq x) = x/4$ (suorakulmion pinta-alana)

$P(2 \leq X \leq 3) = F(3) - F(2) = 3/4 - 2/4 = 1/4$

$P(X \geq 1) = 1 - F(1) = 1 - 1/4 = 3/4$