MTTTP5, luento 25.10.2018

Kertausta

- Satunnaisilmiö (satunnaiskoe), voi syntyä myös useassa eri vaiheessa (yhdistetty satunnaisilmiö)
- Perusjoukko (otosavaruus) E
- Tapahtumat A, B, ... perusjoukon osajoukkoja
- P(A) = k/n

  k = tapahtumaan A liittyvien tulosten lukumäärä

  n = kaikki mahdolliset tulokset
- $A \cup B$ = {A tai B tai molemmat tapahtuvat}

- $A \cap B$ = {A ja B molemmat tapahtuvat}
- A ja B erillisiä, $A \cap B = \emptyset$
- $0 \le P(A) \le 1$, <u>aksiooma 1</u>
- $P(E) = 1$, <u>aksiooma 2</u>
- Jos $A \cap B = \emptyset$, niin $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, <u>aksiooma 3</u>
- $P(\emptyset) = 0$, <u>laskusääntö 1</u>
- $P(A^C) = 1 - P(A)$, <u>laskusääntö 2</u>
- $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k)$, kun tapahtumat pareittain erilliset, <u>laskusääntö 3</u>
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, <u>laskusääntö 4</u> (yleinen yhteenlaskusääntö)

2.3 Todennäköisyyslaskennan aksioomat ja laskusäännöt (jatkoa)

Esim. 2.3.4 Kortin vetäminen korttipakasta

A = {saadaan ruutu}
B = {saadaan hertta}
C = {saadaan risti}

P(saadaan ruutu tai hertta tai risti)
= P(A)+P(B)+P(C) = 13/52 + 13/52 + 13/52 = 39/52.

Esim. 2.3.5   Kortin vetäminen korttipakasta

P{kortti pata tai ässä}
= P{kortti pata} + P{kortti ässä} - P{kortti pataässä}
= 13/52 + 4/52 – 1/52

Ehdollinen todennäköisyys $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)$.

Esim. 2.3.6   On saatu nopanheitossa pariton silmäluku. Mikä on silmäluvun 5 todennäköisyys? $A = \{5\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B) = (1/6)/(3/6) = 1/3$.

<u>Laskusääntö 5</u> (yleinen kertolaskusääntö)

Jos $P(B) > 0$, niin

$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B).$$

Jos A ja B riippumattomia, niin $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Yleistäen: Jos tapahtumat $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ovat riippumattomia, niin $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_k)$.

Esim. 2.3.8. Heitetään noppaa kolme kertaa

$A = \{1.$ heiton silmäluku pariton$\}$,

$B = \{2.$ heiton silmäluku pariton$\}$,

$C = \{3.$ heiton silmäluku pariton$\}$

$P\{$kaikilla heitoilla pariton$\}$

$= P(A)P(B)P(C) = (1/2)(1/2)(1/2) = 1/8$

Esim. Laatikossa on neljä palloa, joista kaksi on mustaa ja kaksi valkoista. Poimitaan satunnaisesti kaksi palloa palauttaen.

P{molemmat pallot valkoisia}
= P{1. pallo valkoinen ja 2. pallo valkoinen}
= P{1. pallo valkoinen}P{2. pallo valkoinen}
= $(2/4)(2/4) = 1/4$

Jos poiminta tehdään palauttamatta, niin
P{molemmat pallot valkoisia}
= P{1. pallo valkoinen}P{2. pallo valkoinen}
= $(2/4)(1/3) = 1/6$.

Esim. Heität noppaa kunnes saat numeron 6.

P{joudut heittämään ainakin 3 kertaa}

= 1 – P{heittokertoja 1 tai 2}

= 1 – (P{heittokertoja 1} +P{heittokertoja 2})

= 1 – 1/6 – (5/6)(1/6) = 25/36

Voi laskea myös todennäköisyyden, että kahdella ensimmäisellä kerralla ei saada numeroa 6.
Tämä on (5/6)(5/6) = 25/36.

2.4 Kombinatoriikka

Yhdistetyn satunnaisilmiön tulosmahdollisuuksien lukumäärä $n_1 n_2 \ldots n_K$.

Esim. 2.4.1 Vakioveikkauksessa rivien lukumäärä 3^{13} = 1 594 323. Rivejä, joissa ei yhtään oikein $2^{13} = 8192$.

Esim. 2.4.2 Henkilöt A, B ja C voidaan asettaa $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ erilaiseen jonoon.

Kuinka moneen eri järjestykseen n erilaista alkiota voidaan järjestää? Järjestyksiä eli permutaatioita on $n(n-1)(n-2)\ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ (n-kertoma)

Esim. 2.4.4 Moneenko erilaiseen jonoon 5 henkilöä voidaan asettaa? Entä kymmenen?

Esim. 2.4.5 Kuinka moneen eri järjestykseen korttipakan 52 korttia voidaan asettaa?
Laskuri http://stattrek.com/online-calculator/combinations-permutations.aspx

Olkoon n erilaista alkiota. Tällöin k:n alkion osajoukkoja eli kombinaatioita voidaan muodostaa

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

(binomikerroin)

Esim. 2.4.3 Erilaisia lottorivejä

$$\binom{40}{7} = \frac{40!}{7!\,(40-7)!} = 18\,643\,560$$

Laskuri http://stattrek.com/online-calculator/combinations-permutations.aspx

Sellaisia lottorivejä, jossa kaikki väärin

$$\binom{33}{7} = \frac{33!}{7!\,(33-7)!} = 4\,272\,048$$

Sellaisia lottorivejä, joissa k oikein

$$\binom{7}{k}\binom{40-7}{7-k}$$

Sellaista vakioveikkausriviä, joissa *k* oikein

$$\binom{13}{k} \cdot 2^{13-k}$$

Esim. Laske todennäköisyys sille, että lottorivissä on vähintään kuusi oikein.

P(vähintään 6 oikein)

= P(kuusi oikein tai 7 oikein)

= P(6 oikein) + P(7 oikein)

$$= \frac{\binom{7}{6}\binom{40-7}{7-6}+1}{\binom{40}{7}} = \frac{231+1}{18643560}$$

Esim. 2.4.6 Kahden alkion satunnaisotokset luvuista 1, 2, 3, 4, 5, 6 satunnaisotokset ja niiden suurimmat alkiot

Otos	Max
1, 2	2
1, 3	3
1, 4	4
1, 5	5
1, 6	6
2, 3	3
2, 4	4
2, 5	5
2, 6	6
3, 4	4
3, 5	5
3, 6	6
4, 5	5
4, 6	6
5, 6	6

$P(Max = 2) = 1/15$
$P(Max = 3) = 2/15$
$P(Max = 4) = 3/15$
$P(Max = 5) = 4/15$
$P(Max = 6) = 5/15$

Esim. 2.4.7 Luvuista 1, 2, 3, 4, 5, 6 kahden alkion systemaattisella otannalla tehdyt otokset ja niiden suurimmat alkiot

Otos	Max	
1, 4	4	P(Max = 4) = 1/3
2, 5	5	P(Max = 5) = 1/3
3, 6	6	P(Max = 6) = 1/3