MTTTP5, luento 27.11.2018

5.2.3 Kahden populaation odotusarvojen erotuksen luottamusväli (kertausta)

Kun $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ tuntemattomia, niin 100(1 - α) %:n

luottamusväli odotusarvojen erotukselle (μ_1- μ_2), on

$$\overline{X} - \overline{Y} \pm t_{\alpha/2;n+m-2} s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$$ Kaava 4.5.

$$s^2 = \frac{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}{n+m-2}$$

Esim. 5.2.11 Miesten ja naisten musikaalisuus.

Group Statistics

	Sukupuoli	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Musikaalisuus	Mies	$n =$ 20	$\bar{x}$ 43,90	s_x 7,860	1,758
	Nainen	$m =$ 25	$\bar{y}$ 42,20	s_y 6,982	1,396

$$s^2 = \frac{(20-1)7{,}86^2 + (25-1)6{,}982^2}{20+25-2} = 54{,}51$$

$$s = 7{,}38$$

$$s\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = 7{,}38\sqrt{\frac{1}{20}+\frac{1}{25}}$$

Independent Samples Test

Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
							95% Confidence Interval of the Difference	
F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
,185	,669	,768	43	,447	$\bar{x}-\bar{y}$ 1,700	2,215	-2,767	6,167
		,757	38,435	,453	1,700	2,245	-2,843	6,243

$t_{0{,}05/2;\,43} \approx 2{,}021$

luottamusväli $1{,}7 \pm 2{,}021 \cdot 2{,}215$

Luku 6

Hypoteesien testaus

Tutkimusongelmia ja tilastollisia hypoteeseja:

- Perunalastupussien keskimääräinen paino?

$H_0 : \mu = \mu_0$ Nollahypoteesi

$H_1 : \mu < \mu_0$ Vaihtoehtoinen hypoteesi (yksisuuntainen)

- Virheellisten komponenttien osuus tuotannossa?

$H_0 : \pi = \pi_0$	Nollahypoteesi
$H_1 : \pi > \pi_0$	Vaihtoehtoinen hypoteesi (yksisuuntainen)

- Asuntojen keskimääräisen neliöhinnat keskustassa ja lähiössä?

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ Nollahypoteesi

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$ Vaihtoehtoinen hypoteesi

(yksisuuntainen)

Esim. Perunalastupussien valmistaja ilmoittaa pussien keskipainoksi 340 g. Oletetaan painon vaihtelun olevan normaalijakautunut hajontana 10 g. Tutkitaan väitettä ja tehdään 9 alkion satunnaisotos. Otoskeskiarvoksi saadaan 336 g.

$H_0 : \mu = 340$ g

$H_1 : \mu < 340$ g

Tilastollinen hypoteesi

Jos H_0 on tosi, niin $\overline{X} \sim N\left(340, \frac{10^2}{9}\right)$.

Tällöin

$$Z = \frac{\bar{X}-340}{10/3} \sim N(0,1)$$

$\boxed{\text{Otossuure}}$, jonka jakauma tunnetaan, kun H_0 tosi. Otossuureesta käytetään nimitystä $\boxed{\text{testisuure}}$.

$z_{havaittu} = \frac{336-340}{10/3} = -1{,}2$ Testisuureen arvo

otoksesta laskettuna,

päättely tämän

perusteella

$\boxed{\text{Hyväksytäänkö vai hylätäänkö nollahypoteesi } H_0\text{?}}$

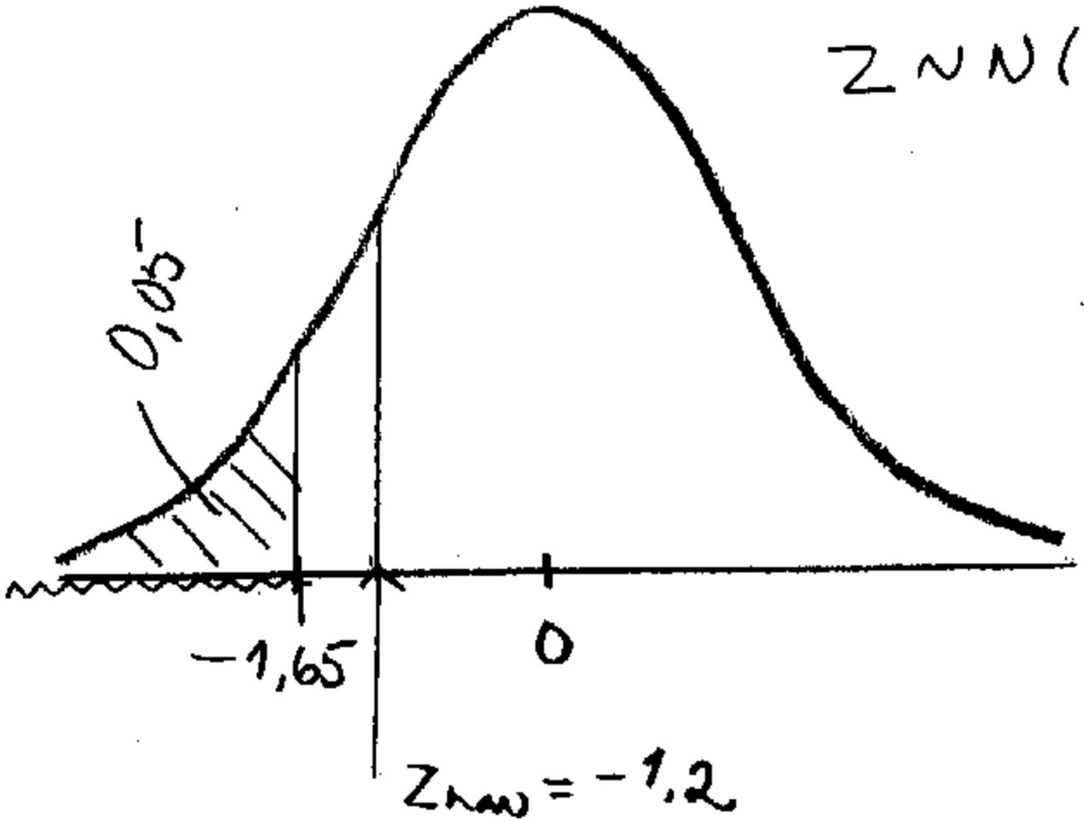
Hyväksytään H_0, jos otoksesta laskettu testisuureen arvo kuuluu tavanomaisiin arvoihin. Jos otoksesta laskettu testisuureen arvo kuuluu harvinaisiin arvoihin, niin H_0 hylätään ja H_1 hyväksytään.

Mikä on harvinaista?

Testisuure noudattaa H_0:n ollessa tosi standardoitua normaalijakaumaa, joten harvinaisina arvoina voidaan pitää esimerkiksi

$-1,65 = -z_{0,05}$ pienempiä arvoja. Jos tehdään näin, niin suoritetaan testaus 5 %:n merkitsevyys- eli riskitasolla, ja hyväksytään H_0.

$Z \sim N(0,1)$, kun H_0 tosi



Usein $\boxed{\text{riskitaso } \alpha}$ = 0,05, 0,025, 0,01, 0,001

Voidaan määrittää myös pienin riskitaso, jolla H_0 voidaan hylätä. Tätä kutsutaan $\boxed{\text{p–arvoksi}}$.

Nyt jos H_0 tosi, niin $P(Z \leq -1{,}2) = 1 - \Phi(1{,}2) = 0{,}1151$ = p-arvo.

Tätä suuremmilla riskeillä H_0 voidaan hylätä. Ei oteta näin suurta riskiä!

Testaukseen liittyvät virhetodennäköisyydet

	Todellinen tilanne	
	H_0 tosi	H_0 epätosi
H_0 hyväksytään	$1 - \alpha$	β 2. lajin virhe
H_0 hylätään	α 1. lajin virhe	$1 - \beta$ testin voimakkuus

6.1 Erilaisia testejä

6.1.1 Yhden populaation odotusarvoa koskeva päättely

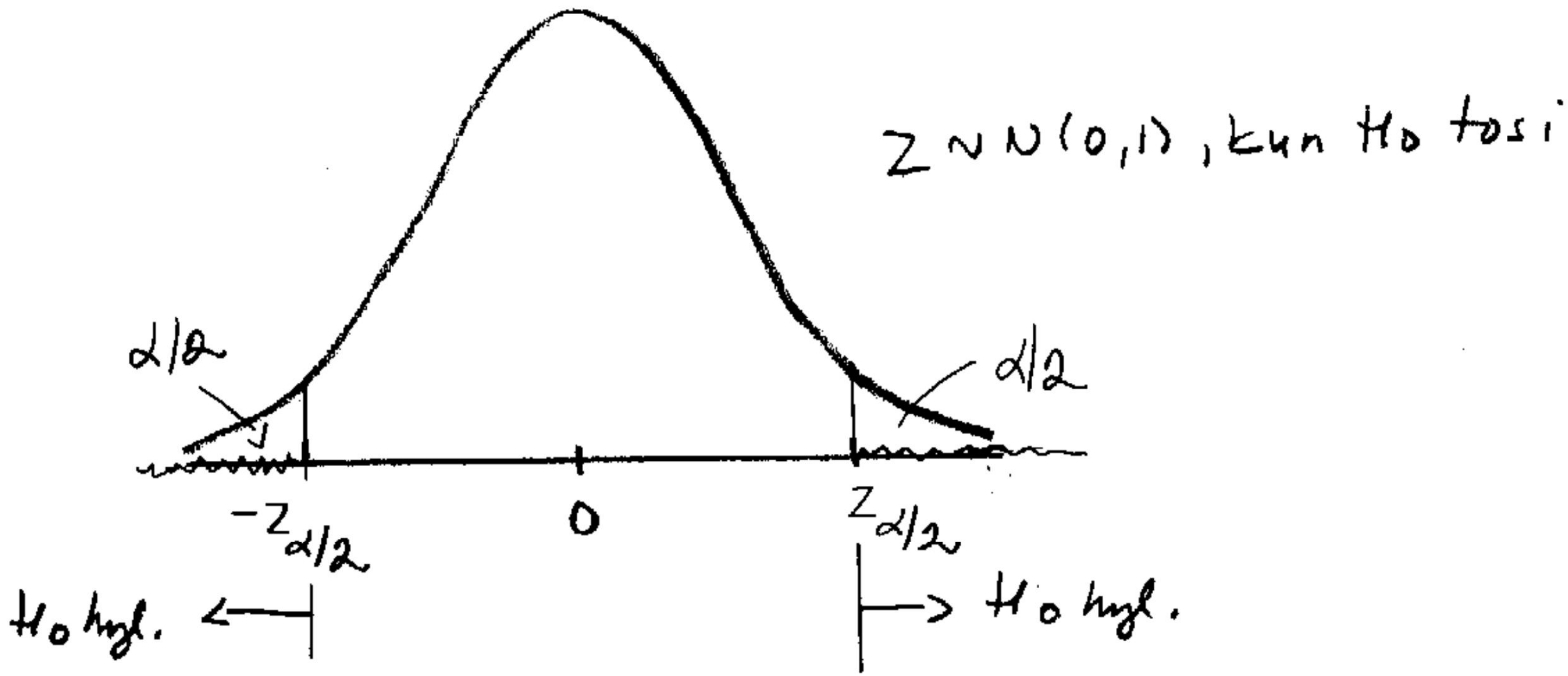
$$\boxed{H_0 : \mu = \mu_0}$$

Olk. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ on satunnaisotos $N(\mu, \sigma^2)$:sta, missä σ^2 tunnettu.

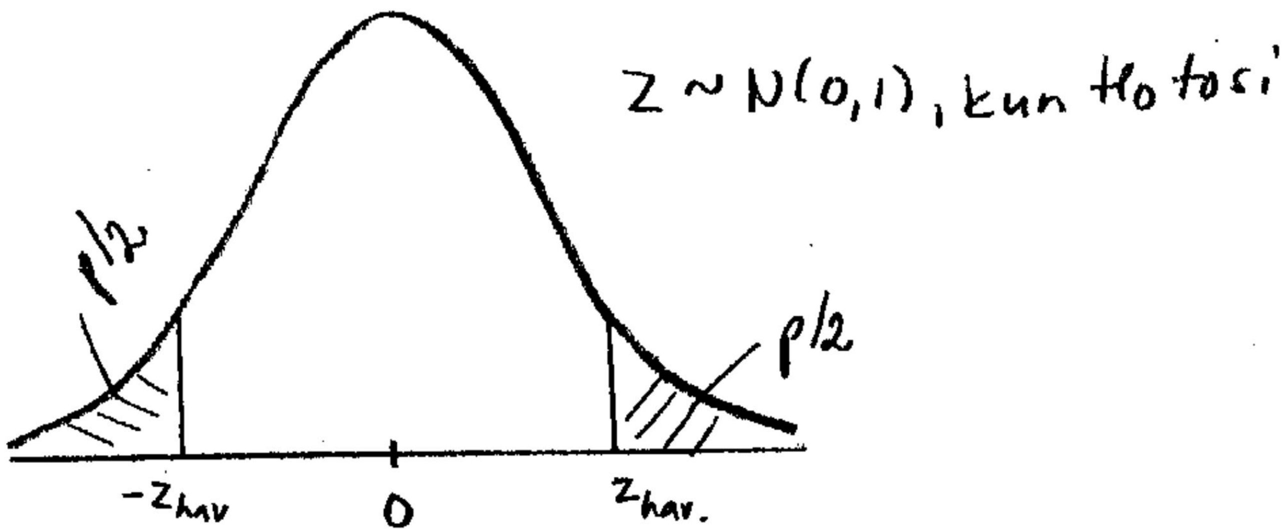
Jos H_0 on tosi, niin

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

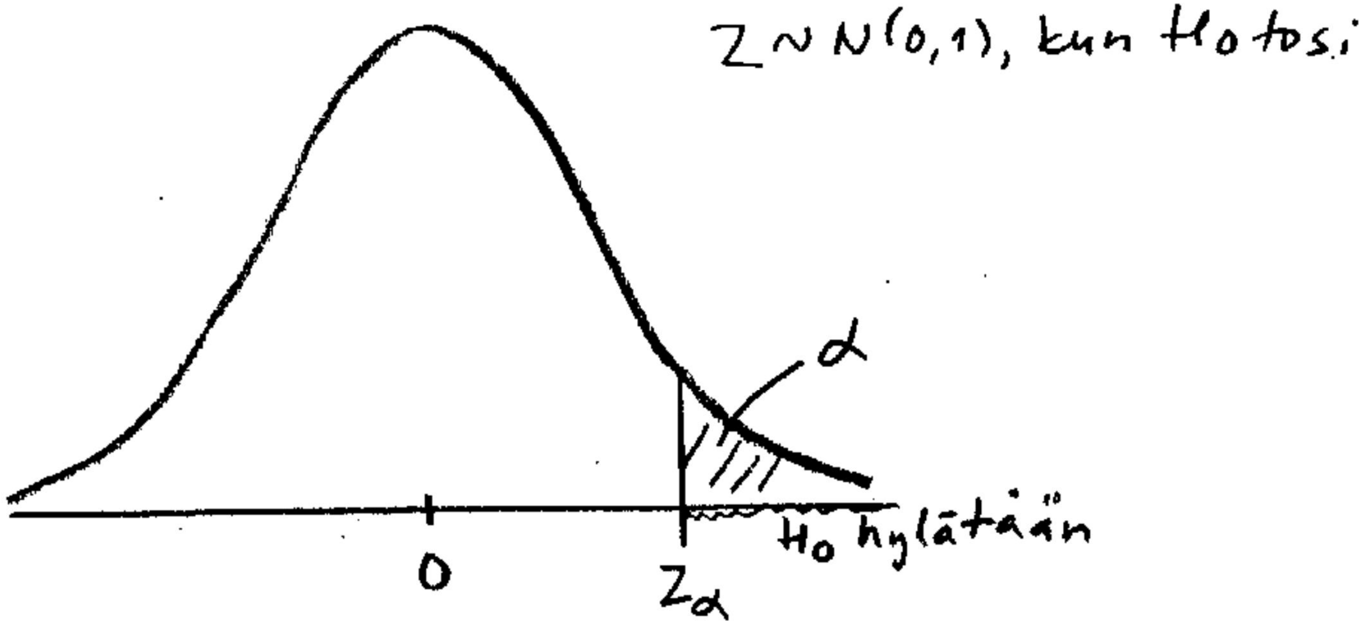
- Jos $H_1 : \mu \neq \mu_0$, niin H_0 hylätään riskitasolla α, jos otoksesta laskettu $|z_{hav}| > z_{\alpha/2}$.



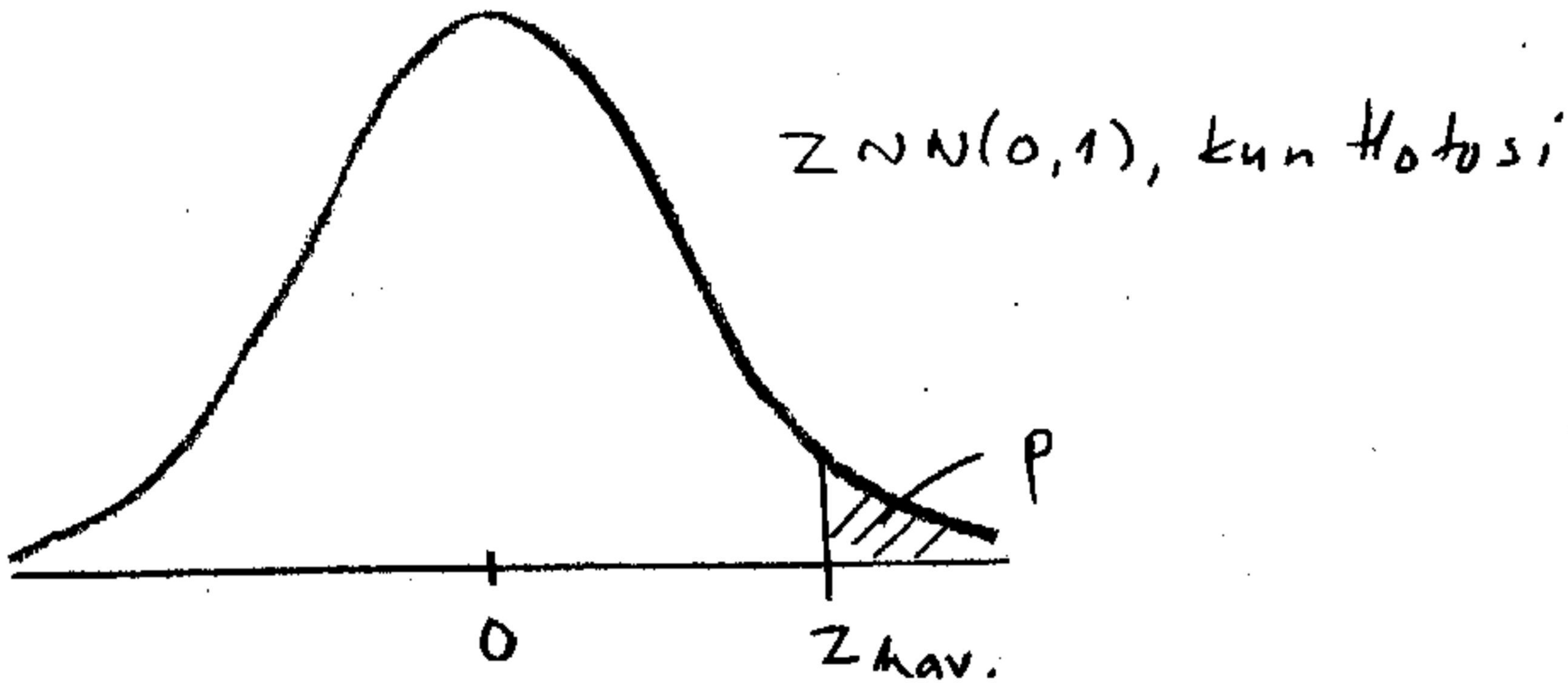
Pienin riskitaso p, jolla H_0 voidaan hylätä, on $2P(Z > |z_{hav}|)$.



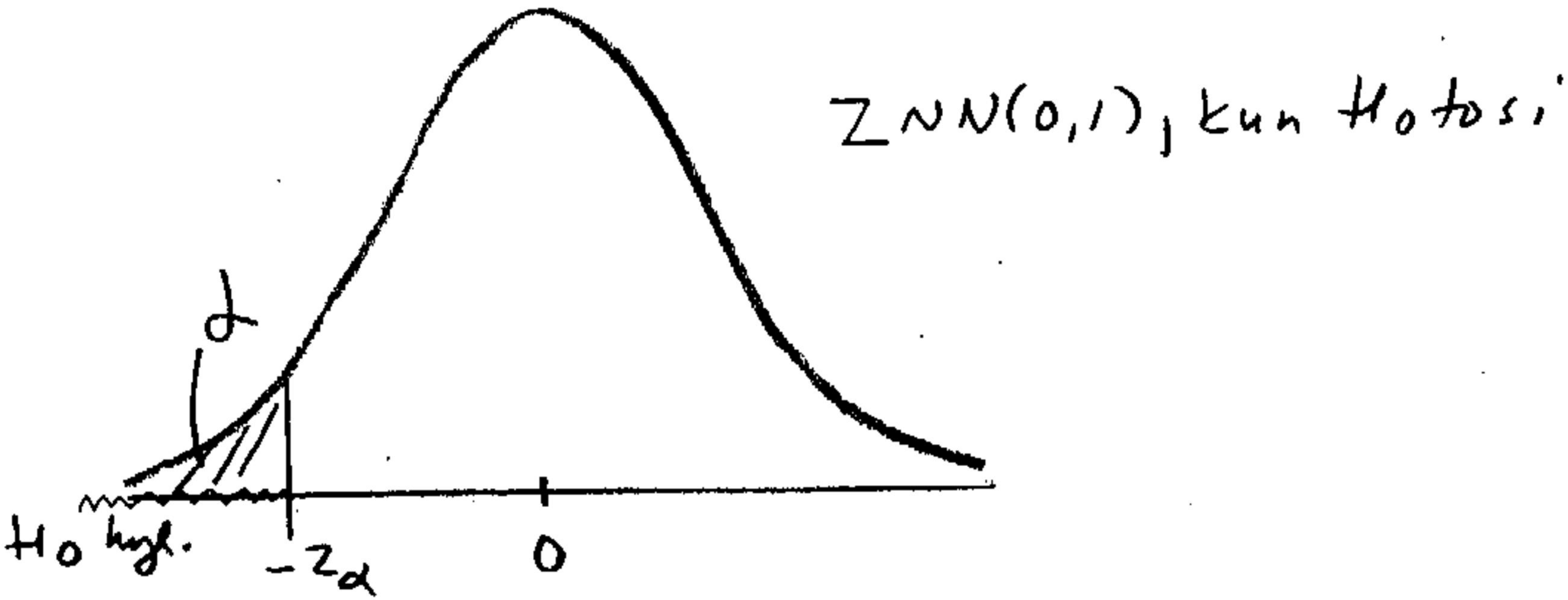
- Jos $H_1 : \mu > \mu_0$, niin H_0 hylätään riskitasolla α, jos otoksesta laskettu $z_{hav} > z_\alpha$.



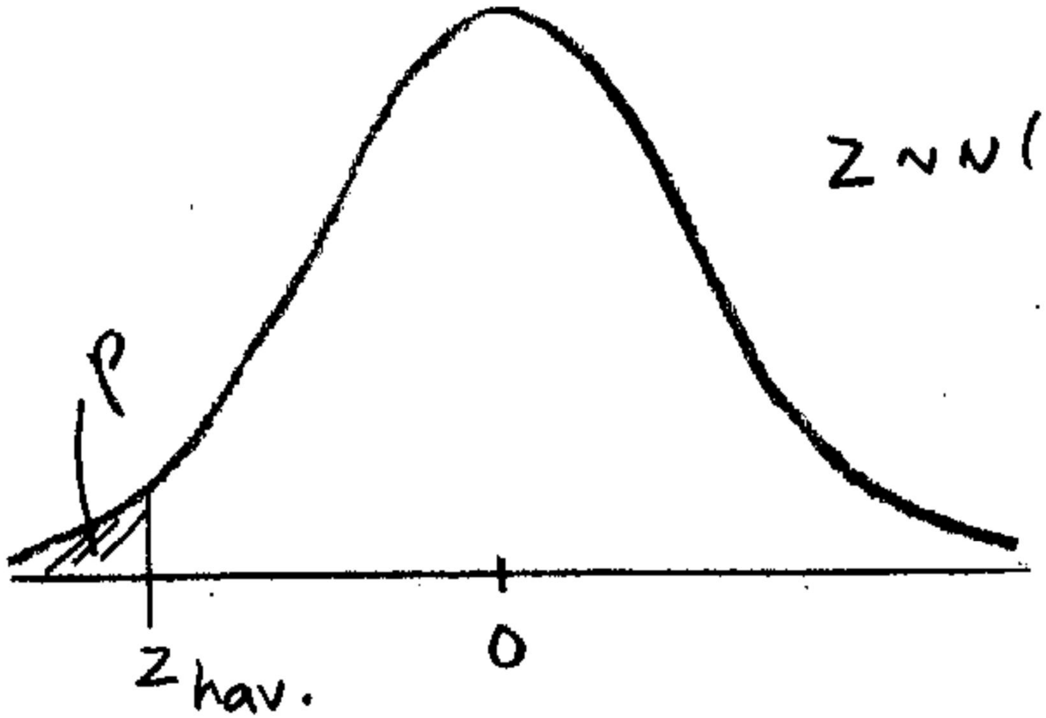
Pienin riskitaso p, jolla H_0 voidaan hylätä, on $P(Z > z_{hav})$.



- Jos $H_1 : \mu < \mu_0$, niin H_0 hylätään riskitasolla α, jos otoksesta laskettu $z_{hav} < -z_\alpha$.



Pienin riskitaso p, jolla H_0 voidaan hylätä, on $P(Z < z_{hav})$.



$Z \sim N(0,1)$, kun H_0 tosi

Esim. Valtakunnallisessa matematiikan kokeessa tulospistemäärä on noudattanut normaalijakaumaa parametrein 64 ja 64. Eräänä vuonna erään koulun 54 oppilaan keskiarvo oli 68. Voidaanko koulua pitää poikkeavana?

$H_0 : \mu = 64$

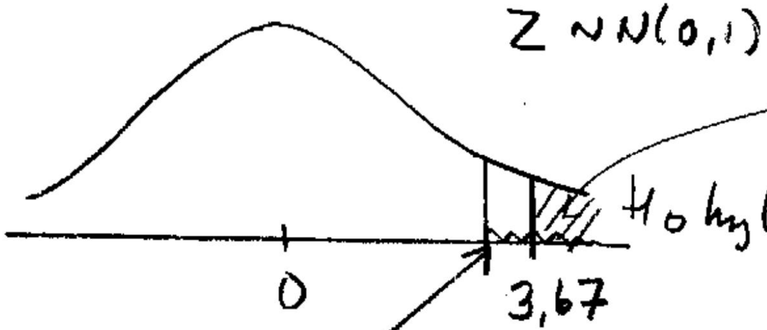
$H_1 : \mu > 64$

Jos H_0 on tosi, niin

$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$. Tässä siis $Z = \frac{\bar{X}-64}{\sqrt{64}/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.

Otoksesta saadaan

$$z_{hav.} = \frac{68-64}{\sqrt{64}/\sqrt{54}} = 3{,}67.$$



p-arvo

Hylätään 0,1 %:n riskitasolla.

$z_{0.001} = 3{,}09$

$$\text{p-arvo} = P(Z > 3{,}67) = 1 - \underbrace{\Phi(3{,}67)}_{\approx 1} \approx 0$$

Esim. Tutkija olettaa, että reagointiaika erääseen ärsykkeeseen on keskimäärin alle 6 sekuntia. Mitattiin 25 henkilön reagointiajat ja saatiin keskiarvoksi 5,2 s. Oletetaan, että reagointiaika on normaalisti jakautunut hajontana 2 s. Onko tutkija oikeassa?

$H_0 : \mu = 6$

$H_1 : \mu < 6$

Jos H_0 on tosi, niin

$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$. Tässä $\mu_0 = 6$, $\sigma = 2$.

Saadaan

$$z_{hav.} = \frac{5{,}2-6}{2/\sqrt{25}} = -2.$$

Pienin riskitaso, jolla H_0 voidaan hylätä, on $P(Z<-2) = 1-\Phi(2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$. Jos valitaan riskitaso, joka on tätä suurempi, niin H_0 hylätään ja H_1 hyväksytään (tutkija oikeassa). Jos valitaan esim. 2 %:n riskitaso, H_0 hyväksytään. Päätellään, että tukija väärässä.

Päättely taulukkoarvojen perusteella:

- Jos valitaan 5 %:n riskitaso, niin harvinaisten arvojen raja on $-z_{0,05}= -1,65$. Koska $-2 < -1,65$, niin H_0 hylätään ja H_1 hyväksytään.
- Jos valitaan 1 %:n riskitaso, niin harvinaisten arvojen raja on $-z_{0,01}= -2,33$. Koska $-2 > -2,33$, niin H_0 hyväksytään.