MTTTP5, luento 23.10.2018

1 Kokonaisuudet, joihin opintojakso kuuluu

https://www10.uta.fi/opas/opintojakso.htm?id=30277&lang=fi&lvv=2018&uiLang=fi#parents

2 Osaamistavoitteet

- Opiskelija osaa yksinkertaisia todennäköisyyslaskuja sekä kombinatoriikan alkeet.

Esim. Kuinka todennäköistä on saada täysosuma samalla viikolla sekä lotossa että Eurojackpotissa?

- Hän ymmärtää satunnaismuuttujan ja sen jakauman.

Esim. Nopanheitossa silmäluku, diskreetti satunnaismuuttuja, jakauma diskreetti tasajakauma

Esim. Satunnaisesti väliltä (0, 1) valittu reaaliluku, jatkuva satunnaismuuttuja, jakauma jatkuva tasajakauma

- Hän pystyy yksinkertaisissa tilanteissa määrittämään satunnaismuuttujan jakauman.

Esim. Avainnipussa on 5 avainta, joista yksi on kotiavain. Valitset satunnaisesti yhden. Määritä todennäköisyys sille, että saat kotiavaimen yrityskerralla k. Montako kertaa joudut keskimäärin yrittämään saadaksesi kotiavaimen?

- Hän tuntee odotusarvon ja varianssin ominaisuudet.

Esim. Oletetaan, että sijoituskohteista A ja B keskimääräinen tuotto euron sijoituksesta on μ ja varianssi σ^2. Miten 1000 euroa kannattaa sijoittaa kohteisiin A ja B?

- Opiskelija tuntee binomijakauman ja normaalijakauman ja osaa laskea näihin liittyviä todennäköisyyksiä.

Esim. Kuinka todennäköistä on läpäistä väittämistä koostuvan tentti arvaamalla?

Esim. Lentoyhtiöllä on kone, joka voi ottaa kuljetettavaksi 5000 kg. Voiko yhtiö ottaa kuljetettavakseen 100 lammasta? Aiemmin on ollut punnittuna 1000 vastaavanlaista lammasta, joiden keskipaino on ollut 45 kg ja hajonta 3 kg.

- Opiskelija ymmärtää satunnaisotoksen, otossuureen, otossuureen jakauman sekä otossuureiden käytön tilastollisessa päättelyssä.

Esim. Rattaan keskimääräinen pyörimisaika on 150 s ja keskihajonta 10 s. Onko rasvaaminen vaikuttanut keskimääräiseen pyörimisaikaan? Rasvauksen jälkeen viiden rattaan pyörimisaikojen keskiarvo oli 162 s.

Esim. Pyöritetään rulettia 3400 kertaa ja saadaan 140 nollaa, jolloin pelipaikka voittaa. Voitko todistaa oikeudessa, että pelipaikan ruletti toimii väärin?

Esim. Tuottavatko koneet A ja B keskimäärin samanmittaisia tankoja?

- Opiskelija ymmärtää estimoinnin ja hypoteesien testaukseen liittyvän teorian opintojaksolla esitetyssä laajuudessa.

Esim. Populaatiossa π % viallisia. Miten arvioidaan? Onko arvio luotettava?

Esim. Populaation odotusarvon μ arviointi. Miten arvioidaan? Onko arvio luotettava?

Esim. Tarkastellaan kahden populaation odotusarvoja. Miten arvioidaan niiden yhtäsuuruutta? Onko arvio luotettava?

- Hän tunnistaa erilaiset estimointitilanteet, osaa valita tilanteeseen soveltuvan luottamusvälin sekä käyttää sitä tilastollisessa päättelyssä.

Esim. Puolueen kannatuksen arviointi. Kyselyssä kannattajia 15 %, otoskoko 2000.

Esim. Hillopurkkien keskimääräisen painon arviointi. Satunnaisesti valittujen 25 hillopurkin keskipaino 330 g ja keskihajonta 20 g.

Esim. Tuottavatko koneet A ja B keskimäärin samanmittaisia tankoja? Molempien koneiden tuotannosta valittu satunnaisesti 100 tankoja, joiden keskiarvoiksi saadaan 2,5 cm ja 2,7 cm sekä keskihajonnoiksi 0,005 cm ja 0,006 cm.

- Hän ymmärtää tilastollisen testauksen periaatteet ja osaa suorittaa tilastollisen testauksen annetussa empiirisessä tilanteessa.

Esim. Puolue väittää kannatuksensa olevan eli 18 %. Voitko uskoa väitteen?

Esim. Voidaanko uskoa, että hillopurkit painavat keskimäärin 340 g.

Esim. Tuottavatko koneet A ja B keskimäärin samanmittaisia tankoja?

3 Kurssin kotisivu

https://coursepages.uta.fi/mtttp5/syksy-2018/

- Opetus
- Kurssi-info (sisältö, tentit, harjoitushyvitys)
- Luennot, luentorunko (sis. kaavat, taulukot), luentokalvot
- Harjoitukset, tehtävät, ohjeet (Moodle), ratkaisut
- Usein kysyttyä
- Palaute
- Linkkejä
- Oheiskirjallisuutta

Luku 2
Todennäköisyyslaskentaa

2.1 Satunnaisilmiö ja tapahtuma

Satunnaisilmiö

- useita tulosmahdollisuuksia
- epävarmuutta tuloksesta

Esim. 2.1.2 Rahanheitto, nopanheitto, lottoaminen, vakioveikkaus, kortin vetäminen sekoitetusta pakasta.

Kaikki mahdolliset tulokset muodostavat perusjoukon E.

Esim. 2.1.1

Rahanheitto E = {kruuna, klaava}

Nopanheitto E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Lottoaminen E = {kaikki mahdolliset lottorivit}, joita on 18643560

Vakioveikkaus E = {kaikki mahdolliset rivit}, joita on 1594323

Tapahtuma on perusjoukon osajoukko.

Esim. 2.1.1

Rahanheitto A = {saadaan kruuna}

Nopanheitto A = {saadaan parillinen} = {2, 4, 6}

Lottoaminen A = {saadaan 7 oikein}

B = {saadaan 6 oikein ja lisänumero }

C = {saadaan kaikki väärin}

Vakioveikkaus A = {saadaan 13 oikein}

B = {saadaan 12 oikein}

2.2 Klassinen todennäköisyys

Perusjoukossa n tulosta, jotka kaikki yhtä todennäköisiä. Tapahtumaan A liittyviä tuloksia k kappaletta. Tällöin A:n todennäköisyys P(A) = k/n.

Esim. 2.2.1
Lottoaminen
  A = {saadaan 7 oikein}, P(A) = 1/18643560
Vakioveikkaus
  A = {saadaan 13 oikein}, P(A) = 1/1594323

2.3 Todennäköisyyslaskennan aksioomat ja laskusäännöt

Todennäköisyys on joukkofunktio P, joka liittää jokaiseen satunnaisilmiön tapahtumaan A reaaliluvun P(A). Tätä kutsutaan tapahtuman A todennäköisyydeksi ja se toteuttaa tietyt aksioomat.

<u>Aksiooma 1</u> Jos A on mikä tahansa satunnaisilmiön tapahtuma, niin $0 \leq P(A) \leq 1$.

<u>Aksiooma 2</u> $P(E) = 1$ (varma tapahtuma)

Olkoot A ja B saman satunnaisilmiön tapahtumia.

Määritellään yhdiste

$A \cup B$ = {A tai B tai molemmat tapahtuvat}

ja leikkaus

$A \cap B$ = {A ja B molemmat tapahtuvat}.

A ja B ovat erillisiä, jos ne eivät voi tapahtua samanaikaisesti, siis $A \cap B = \emptyset$.

<u>Aksiooma 3</u> Jos A ja B erillisiä, niin $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Esim. 2.3.1 Nopanheitto

A = {saadaan parillinen}, $P(A) = 3/6$,

B = {saadaan ykkönen}, $P(B) = 1/6$,

$A \cap B = \emptyset$, joten $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

<u>Laskusääntö 1</u> $P(\emptyset) = 0$.

Tapahtuman A komplementti $A^C = \{A \text{ ei tapahdu}\}$.

<u>Laskusääntö 2</u> $P(A^C) = 1 - P(A)$.

Esim. 2.3.3 Vakioveikkaus

$$A = \{\text{korkeintaan 11 oikein}\}$$

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - P\{\text{12 tai 13 oikein}\}$$

$$= 1 - (P\{\text{12 oikein}\} + P\{\text{13 oikein}\})$$

Esim. Heität noppaa kunnes saat numeron 6. Laske todennäköisyys sille, että joudut heittämään ainakin 3 kertaa. Tällöin joudut heittämään 3 tai 4 tai 5 tai ... kertaa. Todennäköisyys lasketaan komplementin kautta,

1 – P{heittokertoja 1 tai 2}

= 1 – (P{heittokertoja 1} +P{heittokertoja 2})

= 1 – P{heittokertoja 1} - P{heittokertoja 2}

$= 1 - 1/6 - (5/6)(1/6) = 25/36$

<u>Laskusääntö 3</u> Jos tapahtumat A_1, A_2, ..., A_k ovat pareittain erilliset, niin

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k).$$

Esim. 2.3.4 Kortin vetäminen korttipakasta
A = {saadaan ruutu}, B = {saadaan hertta}, C = {saadaan risti}. P(saadaan ruutu tai hertta tai risti) = P(A)+P(B)+P(C) = 39/52.

Laskusääntö 4 (yleinen yhteenlaskusääntö)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Esim. 2.3.5 Kortin vetäminen korttipakasta

P{kortti pata tai ässä} = P{kortti pata} + P{kortti ässä} - P{kortti pataässä} = 13/52 + 4/52 – 1/52