[MTTTP5] Tilastollisen päättelyn perusteet, syksy 2018
HARJOITUS 4 viikko 47

Ratkaisuja

1. Kokonaisaika $Y = X_1 + ... + X_{10}$, missä $X_i \sim N(5, 1{,}5^2)$. Tällöin $Y \sim N(10\cdot 5, 10\cdot 1{,}5^2)$.

$P(Y \leq a) = 0{,}99$, joten $\Phi((a - 50)/(1{,}5\sqrt{10})) = 0{,}99$ ja $(a - 50)/(1{,}5\sqrt{10}) = 2{,}33$ ja $a = 50 + 2{,}33 \cdot 1{,}5\sqrt{10} \approx 61$. Taksi tilattava klo 11.01.

2. Jos pyörimisaika ei ole muuttunut, niin $\overline{X} \sim N(150, 10^2/5)$. Tällöin
$P(\overline{X} \geq 162) = 1 – P(\overline{X} \leq 162) = 1 - \Phi((162 – 150)/(10/\sqrt{5})) = 1 - \Phi(2{,}68) = 1 – 0{,}9963 = 0{,}0037$. On pidentänyt keskimääräistä pyörimisaikaa, sillä jos ei olisi, niin olisi hyvin harvinaista saada otos, jonka keskiarvo suurempi kuin 162.

3. $X_i \sim N(2{,}500, 0{,}005^2)$, $i = 1, ..., 4$, joten $\overline{X} \sim N(2{,}500, 0{,}005^2/4)$.
$P(\overline{X} \leq 2{,}493) = \Phi((2{,}493 – 2{,}500)/(0{,}005/2)) = \Phi(-2{,}8) = 1 - \Phi(2{,}8) = 1 – 0{,}9974 = 0{,}0026$. On harvinaista, että 4 komponentin otoksessa keskiarvo jää alle 2,493. Päätellään, että väsymys on vaikuttanut työn laatuun.

4. Jos oletetaan, että otos runoilijan tuotannosta, niin uusien sanojen lukumäärän keskiarvo $\overline{X} \sim N(6{,}9, 2{,}7^2/5)$, likimain. Tällöin
$P(\overline{X} \geq 11{,}2) = 1 – P(\overline{X} \leq 11{,}2) = 1 - \Phi((11{,}2 – 6{,}9)/(2{,}7/\sqrt{5})) = 1 - \Phi(3{,}56) \approx 0$. Tämä hyvin harvinaista, joten päätellään, että ei runoilijan tuotannosta.

5. X = Hinnan perusteella valintansa tekevien lkm
$X \sim Bin(266, 0{,}1)$, joten $E(X) = 266 \cdot (1/10) = 26{,}6$,
$Var(X) = 266 \cdot (1/10) \cdot (9/10) = 23{,}94$.

Binomijakaumaa voidaan approksimoida normaalijakaumalla. Tässä $X \overset{\text{likimain}}{\sim} N(26{,}6, 23{,}94)$, joten $P(X\geq 38) = 1 - P(X\leq 37) \approx 1 - \Phi((37 – 26{,}6)/\sqrt{23{,}94}) = 1 - \Phi(2{,}13) = 1 - 0{,}9834 = 0{,}0166$. Jos tätä todennäköisyyttä pidetään pienenä, niin päätellään muutosta tapahtuneen.

6. Merkitään X = oikein arvattujen tehtävien lukumäärä. Tällöin $X \sim Bin(60, 0{,}25)$), joten $E(X) = 60 \cdot (1/4) = 15$, $Var(X) = 60 \cdot (1/4) \cdot (3/4) = 11{,}25$.

Binomijakaumaa voidaan approksimoida normaalijakaumalla. Tässä $X \overset{\text{likimain}}{\sim} N(15, 11{,}25)$.
Hylkäämisraja a kiinnitetään siten, että $P(X \geq a) < 0{,}004$. Ratkaistaan a yhtälöstä $P(X \geq a) = 0{,}004$ eli $P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - P(X \leq a - 1) = 0{,}004$, $P(X \leq a - 1) = 0{,}996$. $P((X-15)/\sqrt{11{,}25} \leq (a – 1 - 15)/\sqrt{11{,}25}) = \Phi((a-16)/\sqrt{11{,}25}) = 0{,}996$, joten $(a-16)/\sqrt{11{,}25} = 2{,}65$. Saadaan $a \approx 24{,}888$, joten hylkäämisraja on 25.

Jos laskee binomijakaumasta, niin $P(X \geq 23) = 0{,}0154$, $P(X \geq 24) = 0{,}007$, $P(X \geq 25) = 0{,}003$, ks. laskuri http://stattrek.com/online-calculator/binomial.aspx

7. Kone A: pituus X, joten $\overline{X} \sim N(2{,}5,\ 0{,}005^2/100)$ likimain. Kone B: pituus Y , joten $\overline{Y} \sim N(2{,}5,\ 0{,}005^2/100)$ likimain.

$\overline{X} - \overline{Y} \sim N(2{,}5 – 2{,}5,\ 0{,}005^2/100 + 0{,}005^2/100)$ eli $\overline{X} - \overline{Y} \sim N(0,\ 2x(0{,}005/10)^2)$ likimain, joten $P(|\overline{X} - \overline{Y}| \geq 0{,}002) = 1 - P(|\overline{X} - \overline{Y}| \leq 0{,}002) = 1 - P(-0{,}002 \leq \overline{X} - \overline{Y} \leq 0{,}002) \approx 1 – (\Phi((0{,}002-0)/(0{,}005\sqrt{2}/10)) - (\Phi((-0{,}002-0)/(0{,}005\sqrt{2}/10)) =$
$1 – (\Phi(2{,}828) - \Phi(-2{,}828)) = ... = 2 – 2\Phi(2{,}828) = 0{,}0046$. Koska tämä todennäköisyys on pieni, niin voidaan päätellä, että korjaus on vaikuttanut keskipituuden erotukseen. Jos ei olisi vaikuttanut, niin on harvinaista saada otokset joiden keskiarvojen erotus olisi havaittua 0,002 suurempi.