[MTTTP5] Tilastollisen päättelyn perusteet, syksy 2018

HARJOITUS 3 viikko 46

Ratkaisuja

1. X ~ Bin(5, 1/3), joten P(X = k) = $\binom{5}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}, k = 0, 1, ..., 5.$

E(X) = 5/3 ≈ 1,67, Var(X) = 5 · (1/3) · (2/3) ≈ 1,11.
Koska vielä piti selvittää X:n todennäköisin arvo, niin on laskettava pistetodennäköisyydet:

P(X = 0) = $\binom{5}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{5-0} = \frac{32}{3^5}$

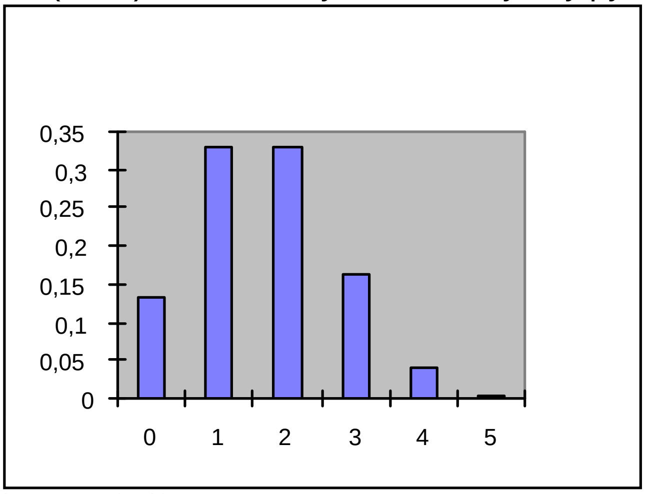
P(X = 1) = $\binom{5}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{5-1} = \frac{80}{3^5} \approx 0,329$ (suurin todennäköisyys)

P(X = 2) = $\binom{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{5-2} = \frac{80}{3^5} \approx 0,329$(suurin todennäköisyys)

P(X = 3) = $\binom{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{5-3} = \frac{40}{3^5}$ jne.

Kuvaaja sekä todennäköisyydet:

Bin(5,1/3), Teknisistä syistä tässä käytetty pylväitä janojen sijaan.



k	P(X=k)
0	0,13168724
1	0,32921811
2	0,32921811
3	0,16460905
4	0,04115226
5	0,00411523

Yhtä todennäköistä on saada yksi kuin kaksikin juomaa. Jos illanviettoja olisi vaikkapa 10, niin A saisi keskimäärin 1,67 juomaa illassa!

2. Merkitään X = klaavojen lukumäärä 10 heiton heittosarjassa. Tällöin X ~ Bin(10, 0,5).
Merkitään Y = tulos (siis voitettu / hävitty euromäärä). Tällöin Y = 2 · X - 2 ·(10 – X). Jos tappio on 12 euroa, niin 2 · x - 2 ·(10 – x) = - 12, josta x = 2, siis klaavoja tullut 2.

P(X = k) = $\binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}, k = 0,1,\ldots,10.$

P(X ≤ 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =
$$\binom{10}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = (1+10+45)\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0{,}05.$$

3. X ~ Bin(100, 0,1), joten E(X) = 100 · (1 / 10) = 10,
Var(X) =100 · (1 / 10) · (9 / 10) = 9 ja
P(X = k) = $\binom{100}{k}\left(\frac{1}{10}\right)^{k}\left(\frac{9}{10}\right)^{100-k}, k = 0,1,\ldots,100.$

P(X>3) = 1 - P(X≤3) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)). Binomijakauman perusteella saadaan
P(X = 0) = $\binom{100}{0}\left(\frac{1}{10}\right)^{0}\left(\frac{9}{10}\right)^{100-0} = \left(\frac{9}{10}\right)^{100}$ ≈ 0,000027
P(X = 1) = $\binom{100}{1}\left(\frac{1}{10}\right)^{1}\left(\frac{9}{10}\right)^{100-1} = 100\cdot\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^{99}$ ≈ 0,000295
P(X = 2) = $\binom{100}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^{2}\left(\frac{9}{10}\right)^{100-2} = 4950\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{2}\left(\frac{9}{10}\right)^{98}$ ≈ 0,001623,
P(X = 3) = $\binom{100}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^{3}\left(\frac{9}{10}\right)^{100-3} = 161700\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{3}\left(\frac{9}{10}\right)^{97}$ ≈ 0,005892,
joten P(X>3) = 1 - P(X≤3) ≈ 1 – 0,007837 ≈ 0,992. Huom. Näitä todennäköisyyksiä laskiessasi voit käyttää hyväksi esimerkiksi Exceliä tai nettilaskureita (ks. luennot 7.11.).

4. Olkoon X = renkaiden kestävyys, X ~ N(56000, 6500^2).

P(X > 61200) = 1- P(X ≤61200) = 1 - Φ((61200- 56000) / 6500) = 1 - $\Phi(0{,}8) = 1 - 0{,}7881 = 0{,}2119$,

$P(X < 50800) = \Phi((50800-56000)/6500)) = \Phi(-0,8) = 1 - \Phi(0,8) = 0,2119$,

$P(51500 \leq X \leq 56000) = \Phi((56000 - 56000)/6500) - \Phi((51500 - 56000)/6500)$
$= \Phi(0) - \Phi(-0,69) = \Phi(0) - (1 - \Phi(0,69)) = 0,5 - 1 + 0,7549 = 0,2549.$

5. Olkoon X = kananmunan paino, $X \sim N(60, 15^2)$.

$P(X \leq 45) = \Phi((45 - 60)/15) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$

$P(X \leq a) = 0,1587 + (1 - 0,1587)/2 = 0,1587 + 0,4207 = 0,5794$, joten $\Phi((a - 60)/15)$ $= 0,5794$. Nyt siis $(a - 60)/15 = 0,20$ (taulukosta) ja $a = 15 \cdot 0,2+60 = 63$.

6. Merkitään X = hillopurkin paino. Jos ei ole tapahtunut muutosta, niin $P(X \leq 338,5) = \Phi((338,5 - 345)/2,8) = \Phi(-2,321) = 1 - \Phi(2,321) = 1 - 0,9898 = 0,0102$. Siis jos muutosta ei ole tapahtunut, niin on harvinaista saada satunnaisesti valiten valittua kevyempi purkki, joten päätellään muutosta tapahtuneen.

7. Merkitään X = nuoren miehen pituus. Oletetaan, että X noudattaa normaalijakaumaa odotusarvona 179 ja keskihajontana σ.

Oletuksen mukaan $P(X > 195) = 0,01$, joten $P(X < 195) = \Phi((195-179)/\sigma) = 0,99$.

Normaalijakauman kertymäfunktion taulukon avulla saadaan, että $(195 - 179)/\sigma$ $\approx 2,33$, josta
$\sigma \approx 6,87$.

$P(160 < X < 190)$
$= \Phi((190-179)/6,87) - \Phi((160-179)/6,87)$
$= \Phi(1,60) - \Phi(-2,77)$
$= \Phi(1,60) - (1 - \Phi(2,77))$
$= 0,9452 - 1 + 0,9972$
$= 0,9424$.
Siis n. 6 % jää rajojen ulkopuolelle.