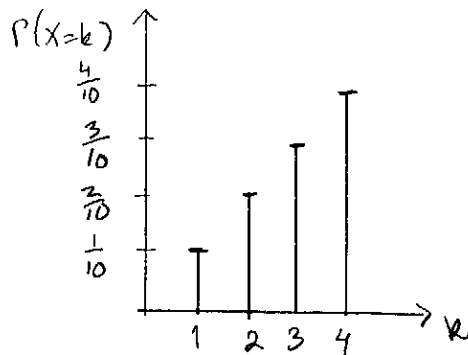


HARJOITUS 2 viikko 45

RATKAISUJA

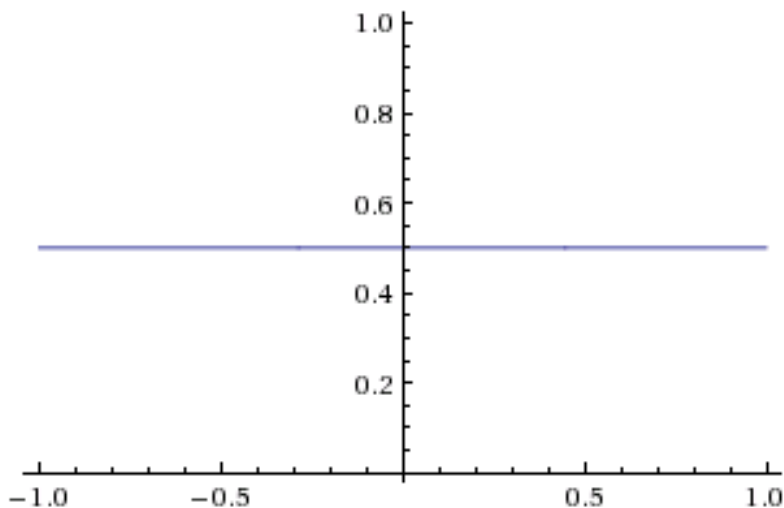
1. Koska kyse diskreetistä satunnaismuuttujasta, niin pistetodennäköisyyksien summan on oltava 1. Siis $1c + 2c + 3c + 4c = 1$, josta $c = 1/10$. Saadaan $P(X = k) = k/10$, $k=1, 2, 3, 4$. Kuvaaja:



$$E(X) = (1/10) \cdot 1 + (2/10) \cdot 2 + (3/10) \cdot 3 + (4/10) \cdot 4 = 3.$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{10}(1-3)^2 + \frac{2}{10}(2-3)^2 + \frac{3}{10}(3-3)^2 + \frac{4}{10}(4-3)^2 = 1.$$

2.



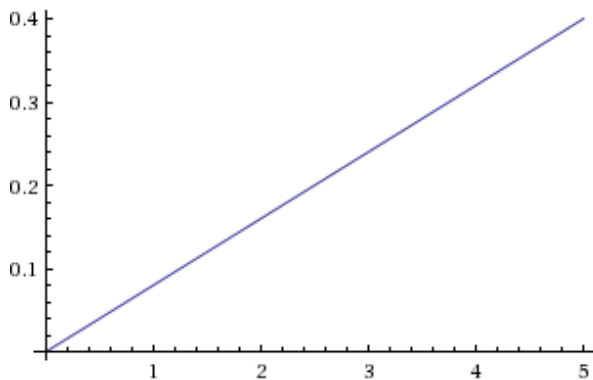
Tämä piirretty sivulla <http://www.wolframalpha.com/> komennolla plot 0.5 from -1 to 1 .

On tiheysfunktio, koska kuvaajan ja x-akselin väliin jäävä pinta-ala on yksi ja $f(x) \geq 0$. $F(x) = P(X \leq x) = (x - (-1))/2 = (x+1)/2$, $F(0,5) = P(X \leq 0,5) = 1,5 \cdot 0,5 = 0,75$.

3.

Kuvaaja origon kautta kulkeva, nouseva suora. Kulmakerroin c määrättävä siten, että pinta-ala, joka jää suoran ja x - akselin väliin, on 1. Kyseisen kolmion pinta-ala $A = 5 \cdot (c \cdot 5)/2 = 25c/2$, joka on 1, kun $c = 2/25$.

Tiheysfunktion $f(x) = (2/25)x$ kuvaaja:



Kuvaaja piirretty sivulla <http://www.wolframalpha.com/> komennolla plot $(2/25)*x$ from 0 to 5.

$F(x) = P(X \leq x) = (x \cdot 2x/25)/2 = x^2/25, 0 \leq x \leq 5$, (saadaan kolmion pinta-ala).

$P(X \leq 1) = F(1) = 1/25$

$P(X \geq 2) = 1 - F(2) = 1 - 4/25 = 0,84$

$P(3 \leq X \leq 4) = F(4) - F(3) = 16/25 - 9/25 = 7/25$.

4. Vaihtoehtoja $\binom{5}{2} = 10$.

Vaihtoehdot:

	AL	AM	AP	AE	LM	LP	LE	MP	ME	PE
Y:	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0

Nyt $P(Y = 2) = 1/10, P(Y = 1) = 6/10, P(Y = 0) = 3/10$.

$E(Y) = 2 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,6 + 0 \cdot 0,3 = 0,8$.

5.	Mahdolliset heittosarjat	Klaavojen lukumäärä	Viikkoraha X
	Kr, Kr, Kr	0	0
	Kr, Kr, Kl	1	100
	Kr, Kl, Kr	1	100
	Kl, Kr, Kr	1	100
	Kl, Kl, Kr	2	200
	Kl, Kr, Kl	2	200
	Kr, Kl, Kl	2	200
	Kl, Kl, Kl	3	300

$$P(X = 0) = 1/8, P(X = 100) = 3/8, P(X = 200) = 3/8, P(X = 300) = 1/8.$$

$E(X) = (1/8) \cdot 0 + (3/8) \cdot 100 + (3/8) \cdot 200 + (1/8) \cdot 300 = 150$ (senttiä)
 100 ja 200 ovat yhtä todennäköisiä. Koska X:n odotusarvo on 150, niin keskimäärin viikossa saadaan 150 senttiä ja siis vuodessa $52 \cdot 150$ senttiä.

6. Olkoon X = sen kerran järjestysnumero, jolloin myyjä saa tuotteensa myydyksi 1. kerran.

$$\text{Nyt } P(X = 1) = 0,30, P(X = 2) = 0,70 \cdot 0,30, P(X = 3) = 0,70 \cdot 0,70 \cdot 0,30, \text{ jne.}$$

$$P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 2) + \dots + P(X = 6)) = 0,117649.$$

X:n todennäköisyysjakauma on siis $P(X = k) = 0,70^{k-1} \cdot 0,30$, $k = 1, 2, 3, \dots$ Itse asiassa kyse on nk. geometrisesta jakaumasta. Jos onnistumisen todennäköisyys on p, niin voidaan osoittaa, että geometrisen jakauman odotusarvo $E(X) = 1/p$.

Toinen vaihtoehto kysytyn todennäköisyyden laskemiseksi: Lasketaan todennäköisyys, että epäonnistutaan 6 kertaa. Tämä on $0,70^6$.

$$7. \quad E(X) = 0,4 \cdot 11 + 0,2 \cdot 10 + 0,2 \cdot 12 + 0,1 \cdot 13 + 0,1 \cdot 14 = 11,5.$$

$$\text{Var}(X) = 0,4 \cdot (11-11,5)^2 + 0,2 \cdot (10-11,5)^2 + 0,2 \cdot (12-11,5)^2 + 0,1 \cdot (13-11,5)^2 + 0,1 \cdot (14-11,5)^2 = 1,45.$$

Merkitään Y = Tuotto

$$E(Y) = E(2000(12 - X)) = E(2000 \cdot 12 - 2000X) = 2000 \cdot 12 - 2000E(X) = 1000$$

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(2000(12 - X)) = \text{Var}(2000 \cdot 12 - 2000X)$$

$$= \text{Var}(-2000X) = (-2000)^2 \text{Var}(X) = (-2000)^2 \cdot 1,45$$

Tappiollinen, jos aikaa kuluu 13 tai 14 päivää.

$$\text{Tämän todennäköisyys } P(X=13) + P(X=14) = 0,2.$$

8. Kokonaispistemäärä $Y = X_1 + \dots + X_{20}$, missä $X_i = i$. kysymyksestä saatu pistemäärä. $E(X_i) = (1/3) \cdot 2 + (2/3) \cdot (-3) = -4/3$ ja

$$\text{Var}(X_i) = \frac{1}{3} \cdot \left(2 - \left(-\frac{4}{3}\right)\right)^2 + \frac{2}{3} \cdot \left(-3 - \left(-\frac{4}{3}\right)\right)^2 = 150/27, i = 1, 2, \dots, 20.$$

Nyt $E(Y) = E(X_1 + \dots + X_{20}) = E(X_1) + \dots + E(X_{20}) = 20 \cdot (-4/3) \approx -26,67$ ja

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_{20}) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_{20}) = 20 \cdot 150/27 \approx 111,11.$$

Toisin:

Olkoon $X =$ oikeitten vastausten lkm. $X \sim \text{Bin}(20, 1/3)$, $E(X) = 20/3$, $\text{Var}(X) = 40/9$.

Kokonaispistemäärä $Y = 2X - 3(20 - X) = 5X - 60$, joten $E(Y) = 5E(X) - 60 = 100/3 - 60$,

$$\text{Var}(Y) = 5^2 \text{Var}(X) = 1000/9.$$

Jos kaikki tenttiin osallistujat arvaisivat, niin tenttipistemäärän keskiarvo olisi lähellä Y :n odotusarvoa eli lukua $-26,67$.