MTTTP1, luento 2.4.2019

KERTAUSTA TESTAUKSESTA

- Asetetaan
  H_0
  H_1

- Valitaan testisuure, jonka jakauma tunnetaan H_0:n ollessa tosi.

- Lasketaan otoksesta testisuureelle arvo.

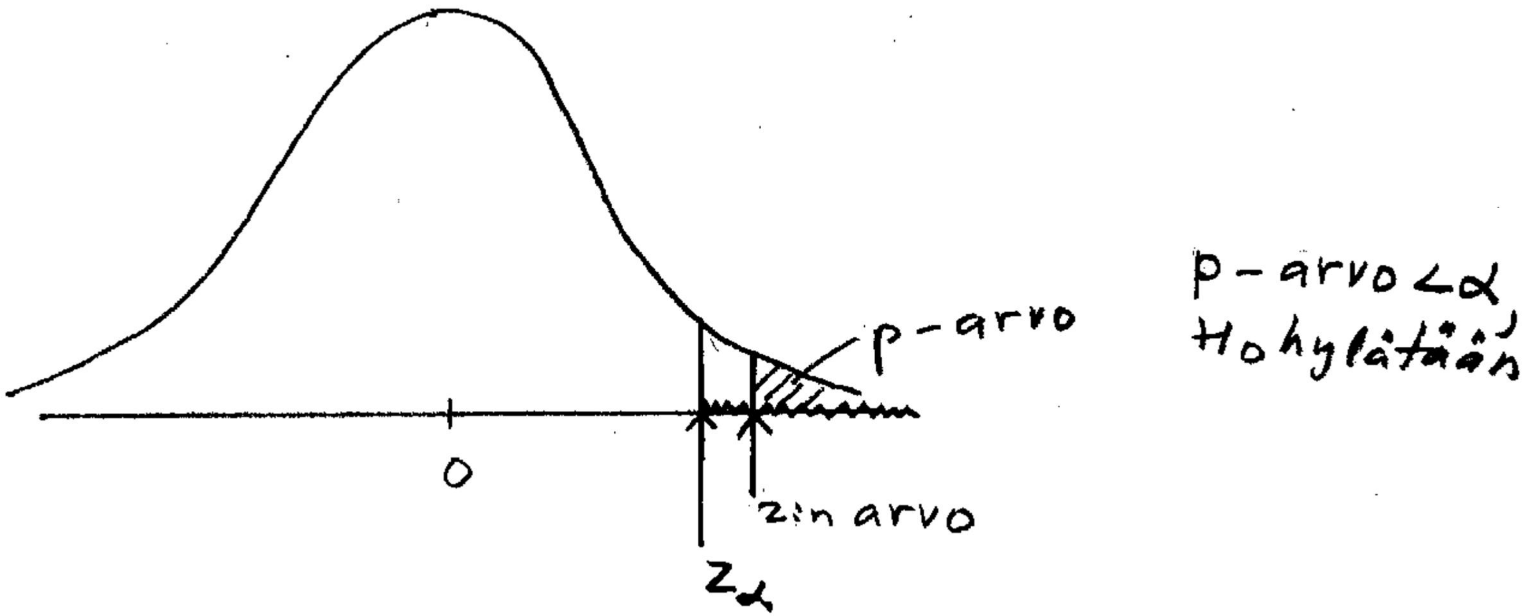
- Kiinnitetään riskitaso α (eli todennäköisyys, että tosi H_0 hylätään). Määritetään testisuureen harvinaisten arvojen joukko, joka riippuu riskitasosta ja vaihtoehtoisesta hypoteesista.

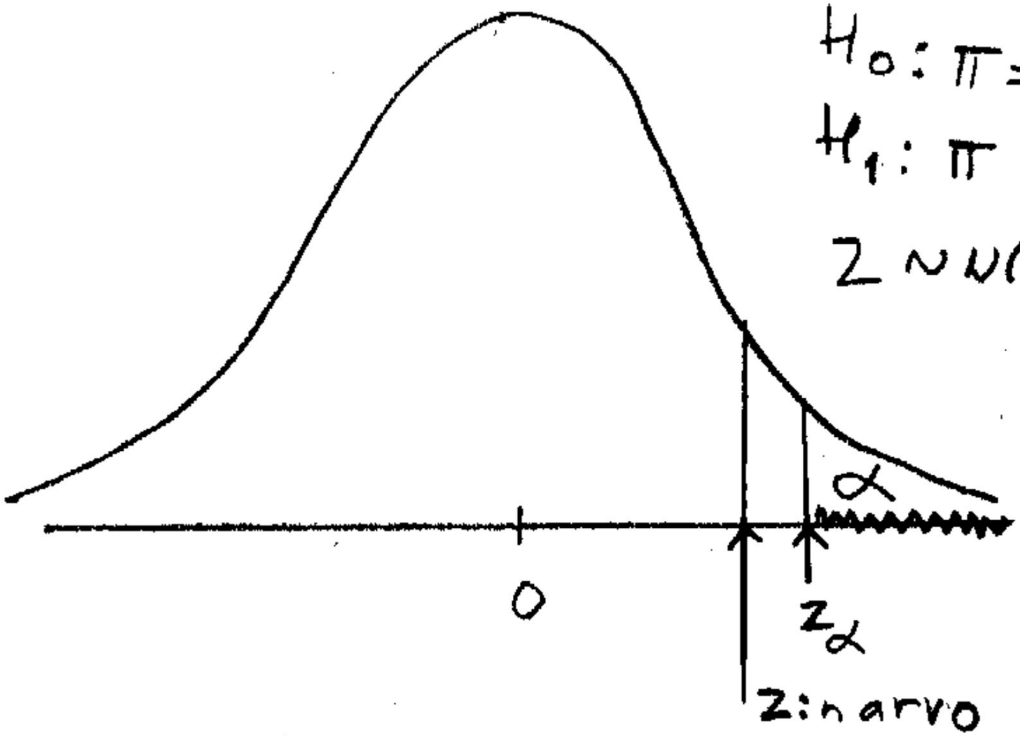
- Hylätään H_0, jos saatu testisuureen arvo kuuluu harvinaisten arvojen joukkoon, muulloin hyväksytään.

- H_0:n hylkääminen johtaa H_1:n hyväksymiseen.

- Päättely voidaan myös tehdä nk. p-arvon perusteella, p-arvo on pienin riskitaso, jolla H_0 voidaan hylätä. Jos p-arvo on valittua riskitasoa α pienempi, niin H_0 hylätään, muulloin hyväksytään.

H_0: $\pi = \pi_0$, H_1: $\pi > \pi_0$, $Z \sim N(0, 1)$ likimain, kun H_0 tosi.





$H_0: \pi = \pi_0$

$H_1: \pi > \pi_0$

$Z \sim N(0,1)$ likimain, kun H_0 tosi

p-arvo $> \alpha$

H_0 hyväksytään

p-arvo	tulos tilastollisesti
< 0,05	melkein merkitsevä
< 0,01	merkitsevä
< 0,001	erittäin merkitsevä

7.7.1 Prosenttiosuuden testaus

H_0: $\pi = \pi_0$

$$Z = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\pi_0 (100 - \pi_0) / n}} \overset{likimain}{\sim} N(0,1)$$, kun H_0 tosi

Esim. 7.7.1. Tarkastellaan erään liikkeen asiakkaita. Halutaan tutkia, ovatko asiakkaista yli puolet naisia. Tehdään 200 asiakkaan satunnaisotos jossa naisia on 113.

Nyt

H_0: π = 50 %

H_1: π > 50 %.

Otoksessa naisia 56,5 %. Aineiston perusteella testisuureen arvoksi saadaan

$$z = \frac{56{,}5 - 50}{\sqrt{50(100-50)/200}} = 1{,}838 > z_{0{,}05} = 1{,}6449$$

.

H_0 hylätään 5 %:n riskitasolla, mutta ei 2,5 %:n riskillä, joten 0,025 < p-arvo < 0,05.

Ks.
http://www.sis.uta.fi/tilasto/mtttp1/syksy2018/luentorunko.pdf#page=81

Esim. 7.7.2. Eräs puolue väittää, että suomalaisista 40 % kannattaa sen tekemää ehdotusta. Väitteen tutkimiseksi teit kyselyn 1000 henkilölle, joista 360 ilmoitti kannattavansa kyseistä ehdotusta. Onko puolue arvioinut ehdotuksen kannattajat oikein?

Nyt

H_0: π = 40 % ja H_1: π < 40 %

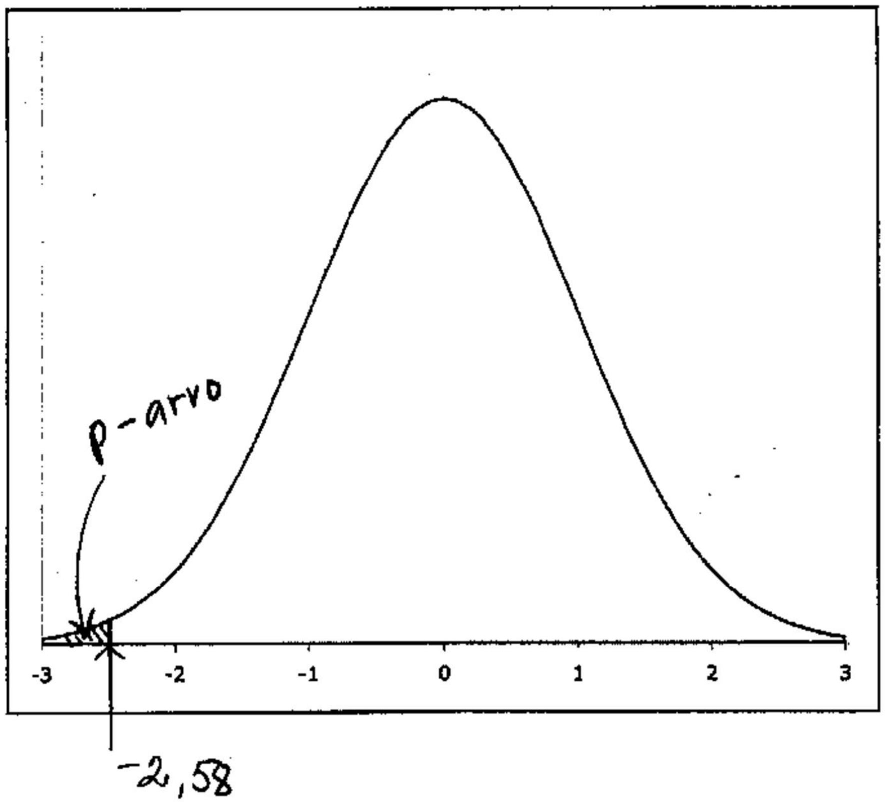
Otoksessa kannattajia 36 %. Testisuureen arvoksi saadaan

$$z = \frac{36 - 40}{\sqrt{40(100-40)/1000}} = -2{,}58 .$$

Onko tämä harvinaisten arvojen joukkoon kuuluva?

Jos tehdään testaus 1 %:n riskitasolla, niin harvinaisiksi arvoiksi katsotaan lukua $-2{,}3264 = -z_{0{,}01}$ pienemmät ja täten hylätään nollahypoteesi $(-2{,}58 < -2{,}3264)$.

Pienin riskitaso, jolla H_0 voidaan hylätä, on $P(Z \leq -2{,}58) \approx 0{,}005$, koska $P(Z \leq -2{,}5758) = 0{,}005$.



Vaihtoehtoinen hypoteesi voidaan asettaa myös kaksisuuntaisena, jolloin H_1: $\pi \neq 40$ %.

Tällöin *p*-arvo on $P(Z \leq -2{,}58) + P(Z \geq 2{,}58) \approx 0{,}01$.

Jos valitaan kaksisuuntaisessa testissä tätä suurempi riskitaso (esimerkiksi 0,025), niin nollahypoteesi hylätään ja päätellään, että puolue on arvioinut ehdotuksen kannattajien osuuden väärin.

Esim. Kahvin myyjä väittää, että 15 % kahvin juojista valitsee kahvimerkin hinnan perusteella. Tehdään tutkimus, jossa 250 kahvin juojalta kysytään kahvimerkin valintaa vaikuttavia tekijöitä. Vastanneista 25 valitsi kahvin hinnan perusteella. Uskotko myyjän väitteen?

$H_0: \pi = 15$

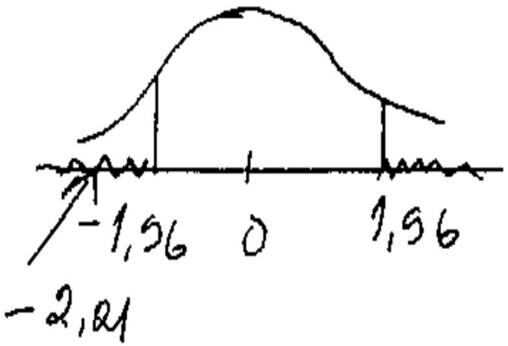
$H_1: \pi \neq 15$

$$Z = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(100-\pi_0)/n}} \overset{\text{likimain}}{\sim} N(0,1), \text{ kun } H_0 \text{ tosi.}$$

$$z_{havaittu} = \frac{10-15}{\sqrt{15(100-15)/250}} = -2,21$$

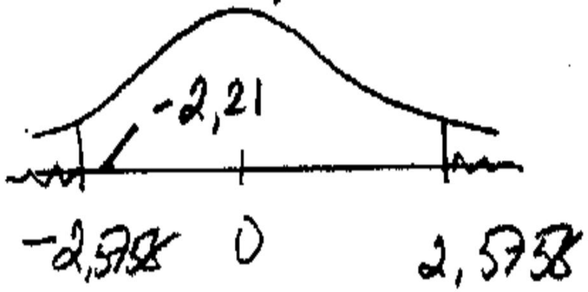
$\alpha = 0,05 \quad \alpha/2 = 0,025$

$z_{0.025} = 1,96$



$\alpha = 0,01, \ \alpha/2 = 0.005$

$z_{0.005} = 2,5758$



H_0 hylätään 5%:in riskitasolla, mutta ei 1%:n riskitasolla.

0,01< p-arvo < 0,05

7.7.2 Odotusarvon testaus

$H_0 : \mu = \mu_0$

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$, kun H_0 tosi

Esim. 7.7.3. Kauppias väitti, että kananmunien keskipaino on 50 g. Tehdään 36 alkion satunnaisotos ja saadaan $\bar{x}$ = 47, s = 6. Onko kauppiaan väittämään uskomista? Nyt

H_0: μ = 50 g

H_1: μ < 50 g

Saadaan

$$t = \frac{47-50}{6/\sqrt{36}} = -3,$$

joka on pienempi kuin $-t_{0,005;35} \approx -2,75$, joten hylätään nollahypoteesi 0,5 %:n riskitasolla (ei uskota kauppiaan väitettä).

Voidaan arvioida, että p-arvo eli $P(t_{35} < -3) < 0{,}005$.

Vaihtoehtoinen hypoteesi voidaan myös asettaa kaksisuuntaisena eli

H_1: $\mu \neq 50$ g

Jos päättely tehdään 1 %:n riskitasolla, niin harvinaisten arvojen rajoina ovat $\pm t_{0,01/2;35} \approx \pm 2{,}75$, joiden ulkopuolelle -3 jää. Päätellään, että $\mu \neq 50$ g.

Nyt p –arvo $= P(t_{35} < -3) + P(t_{35} > 3) < 0{,}01$.

Esim. 7.7.4. Perunalastujen valmistaja ilmoittaa perunalastupussiensa keskipainoksi 340 g. Tutkitaan väitettä ja tehdään 16 pussin satunnaisotos ja saadaan keskipainoksi 336 g ja keskihajonnaksi 11 g. Voitko uskoa valmistajan väitteen?

H_0: $\mu = 340$ g

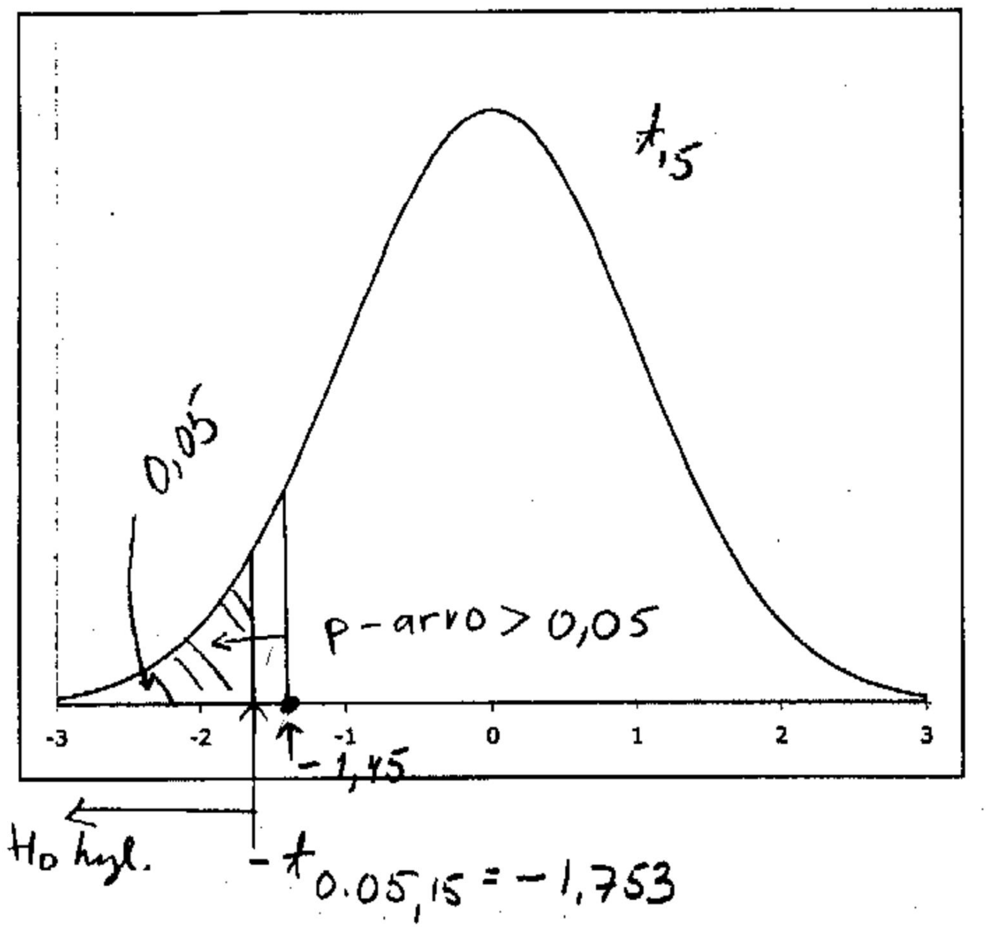
H_1: $\mu < 340$ g

$$t = \frac{336 - 340}{11/\sqrt{16}} = -1{,}45$$

5 %:n riskitasolla harvinaisten arvojen raja on

$-t_{0,05;15} = -1{,}753$, joten H_0 hyväksytään.

Nyt *p*-arvo on $P(t_{15} < -1{,}45) > 0{,}05$, graafisesti:



Sama johtopäätelmä tehdään, jos vaihtoehtoinen hypoteesi asetetaan kaksisuuntaiseksi eli H_1: $\mu \neq 340$ g.

Koska $t_{0,05/2;15} = 2,131$, niin H_0 hyväksytään 5 %:n riskitasolla.

Nyt p-arvo = $P(t_{15} < -1,45) + P(t_{15} > 1,45) > 0,10$.

Esim. Lepakoiden tunnistusmatkat, ks.
http://www.sis.uta.fi/tilasto/mtttp1/syksy2018/esimerkit_kaavoihin.pdf

7.7.3 χ^2–riippumattomuustesti

Kahden muuttujan välinen riippuvuustarkastelu ristiintaulukon perusteella, asetetaan

H_0: ei riippuvuutta
H_1: on riippuvuutta

H_0 hylätään, jos p-arvo pieni (esim. < 0,05).

7.7.4 Odotusarvojen yhtäsuuruuden testaaminen t-testillä

Tutkitaan kahden populaation odotusarvojen yhtäsuuruutta riippumattomien otosten t-testillä, asetetaan

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

H_0 hylätään, jos p-arvo pieni (esim. $< 0{,}05$).