

Matemaattinen tilastotiede

6. harjoitukset, 50. vko 2006

6.1. Osoita oikeaksi väitteet:

(a) Jos $(X, Y) \sim N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, niin $(U, V) \sim N_2(0, 0, 1, 1, \rho)$, missä $U = (X - \mu_1)/\sigma_1$ ja $V = (Y - \mu_2)/\sigma_2$.

(b) Jos $(U, V) \sim N_2(0, 0, 1, 1, \rho)$, niin $(X, Y) \sim N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$.

Ratkaisu1. Määritelmän 7.6 mukaan $(X, Y) \sim N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, jos se voidaan lausua muodossa

$$\begin{aligned} X - \mu_1 &= \sigma_1 \sqrt{1 - \rho^2} Z_1 + \rho \sigma_1 Z_2, \\ Y - \mu_2 &= \sigma_2 Z_2, \end{aligned}$$

mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\begin{aligned} \frac{X - \mu_1}{\sigma_1} &= \sqrt{1 - \rho^2} Z_1 + \rho Z_2, \\ \frac{Y - \mu_2}{\sigma_2} &= Z_2, \end{aligned}$$

Edellä Z_1 ja Z_2 ovat riippumattomat ja noudattavat standardimuotoista normaalijakaumaa $N(0, 1)$ sekä $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ ja $|\rho| \leq 1$. Siis määritelmän 7.6 mukaan

$$(X, Y) \sim N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho) \equiv (U, V) \sim N_2(0, 0, 1, 1, \rho).$$

Ratkaisu2. (1) Jos $(X, Y) \sim N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, niin

$$(0.0.1) \quad f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}Q(x, y)\right],$$

missä

$$Q(x, y) = -\frac{1}{1-\rho^2} \left(\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right).$$

Sijoitetaan $x = \mu_1 + \sigma_1 u$ ja $y = \mu_2 + \sigma_2 v$ lausekkeeseen (0.0.1). Muunnoksen Jacobin determinanti J on

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2.$$

Saadaan

$$\begin{aligned} (0.0.2) \quad f_{U,V}(u, v) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}Q(u, v)\right] |J| \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}Q(u, v)\right], \end{aligned}$$

missä

$$Q(u, v) = \frac{1}{1 - \rho^2} (u^2 - 2\rho uv + v^2),$$

joten (0.0.2) on $N_2(0, 0, 1, 1, \rho)$:n tiheysfunktio.

(2) Jos $(U, V) \sim N_2(0, 0, 1, 1, \rho)$, niin (U, V) :n tiheysfunktio on (0.0.2). Kun siihen sijoitetaan $u = (x - \mu_1)/\sigma_1$ ja $v = (y - \mu_2)/\sigma_2$ ja lasketaan muunnoksen Jacobin determinatti

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2},$$

saadaan sijoituksen jälkeen tiheysfunktio (0.0.1). Siis $(X, Y) \sim N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$.

6.2. Oletetaan, että satunnaismuuttujat X ja Y noudattavat normaalijakaumaa $N_2(0, 0, 1, 1, \rho)$. Määritellään $U = X + Y$ ja $V = X - Y$. Osoita, että (ks. Esimerkki 7.11, s. 203)

- (a) U ja V noudattavat normaalijakaumaa $N_2(0, 0, 2(1+\rho), 2(1-\rho), 0)$.
- (b) U ja V ovat riippumattomat.
- (c) $U \sim N(0, 2(1 + \rho))$ ja $V \sim N(0, 2(1 - \rho))$.

Ratkaisu. (a) Muunnoksen $u = x + y, v = x - y$ käänteismuunnos on

$$x = \frac{u + v}{2}, \quad y = \frac{u - v}{2},$$

jonka Jakobiaani on

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Koska

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right]$$

ja

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= \frac{1}{2} f_{X,Y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{u+v}{2}\right)\left(\frac{u-v}{2}\right) + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2\right)\right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}((1-\rho)u^2 + (1+\rho)v^2)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2(1+\rho)}\sqrt{2(1-\rho)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{u^2}{2(1+\rho)} + \frac{v^2}{2(1-\rho)}\right]\right\}, \end{aligned}$$

joten $(U, V) \sim N_2(0, 0, 2(1 + \rho), 2(1 - \rho), 0)$.

(b)

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{2(1+\rho)}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{2(1+\rho)}\right\} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{2(1-\rho)}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{v^2}{2(1-\rho)}\right\} \\ &= f_U(u)f_V(v), \end{aligned}$$

joten U ja V ovat riippumattomat.

(c) Koska $f_U(u)$ on $N[0, 2(1+\rho)]$:n tiheysfunktio ja $f_V(v)$ on $N[0, 2(1-\rho)]$:n tiheysfunktio, niin $U \sim N[0, 2(1+\rho)]$ ja $V \sim N[0, 2(1-\rho)]$.