Odotusarvo

Määritelmä 3.5 (Odotusarvo) Olkoon X diskreetti satunnaismuuttuja, jonka arvojoukko on S ja todennäköisyysfunktio $f_X(x)$. Silloin X:n odotusarvo on

$$E(X) = \sum_{i:x_i \in S} x_i \, P(X = x_i) = \sum_{i:x_i \in S} x_i f_X(x_i). \tag{3.3.5}$$

Jos summan $\sum\limits_{i:x_i \in S} x_i f_X(x_i)$ yhteenlaskettavien määrä on äärellinen, niin odotusarvo on aina olemassa. Mikäli yhteenlaskettavien määrä on ääretön, tulee summan supeta itseisesti.

Odotusarvon ominaisuuksia

Olkoot X ja Y satunnaismuuttujia, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio sekä a ja b vakioita.

(E1) Jos $X \geq 0$, niin $E(X) \geq 0$. Jos $X \geq 0$ ja $E(X) = 0$, niin $P(X = 0) = 1$.

(E2) Jos $a \in \mathbb{R}$ on vakio, niin $E(aX) = a\,E(X)$ ja $E(a) = a$.

(E3) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

(E4) Jos $X \geq Y$, niin $E(X) \geq E(Y)$.

(E5) Jos $a < X \leq b$, niin $a < E(X) \leq b$.

(E6) $|\,E(X)| \leq E(|X|)$.

(E7) $E[h(X)] = \sum\limits_x h(x)\, P(X = x) = \sum\limits_x h(x) f_X(x)$.

(E8) Jos I_A on tapahtuman A indikaattori, niin $E(I_A) = P(A)$.

(E9) $[E(XY)]^2 \leq E(X^2)\, E(Y^2)$ (Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälö).

(E10) Jos $X \geq 0$ ja a positiivinen vakio, niin $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$ (Markovin epäyhtälö).

Ominaisuudet $(E2)$ ja $(E3)$ osoittavat, että odotusarvo on lineaarinen operaattori. Ominaisuus yleistyy induktiolla usean satunnaismuuttujan tapaukseen. Olkoot $X_1, \ldots, X_n$ satunnaismuuttujat ja $a_1, \ldots, a_n$ vakiot. Silloin

$$E(a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n) = a_1\, E(X_1) + \cdots + a_n\, E(X_n).$$

3.3.3 Satunnaismuuttujan varianssi

Satunnaismuuttujan X varianssin laskemiseksi tarvitaan (Vertaa Lauseen 3.9 kohta 2) sen 1. *momentti* eli odotusarvo $E(X)$ ja 2. *momentti* $E(X^2)$. Satunnaismuuttujan X varianssi on

$$\operatorname{Var}(X) = E[X - E(X)]^2.$$

Varianssin ominaisuuksia

(V1) $\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

(V2) Jos a on vakio, niin $\operatorname{Var}(aX) = a^2 \operatorname{Var}(X)$.

(V3) Jos a on vakio, niin $\operatorname{Var}(X + a) = \operatorname{Var}(X)$.

(V4) $\operatorname{Var}(X) \geq 0$.
$\operatorname{Var}(X) = 0$ jos ja vain jos $P(X = a) = 1$ jollakin vakiolla a.

(V5) Lauseke $E[(X - a)^2]$ saavuttaa miniminsä a suhteen, kun $a = E(X)$.
Tästä seuraa, että
$E[(X - a)^2] \geq \operatorname{Var}(X)$ kaikilla a ja yhtäsuuruus, kun $a = E(X)$.

3.3.4 Kovarianssi ja korrelaatio

Oletetaan, että satunnaismuuttujilla X ja Y on 2. momentti. Silloin odotusarvot $E(XY)$ ja $E[(X - E(X))(Y - E(Y)]$ ovat olemassa Apulauseen 3.1 nojalla.

Määritelmä 3.7 (Kovarianssi) Satunnaismuuttujien X ja Y *kovarianssi* on

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \tag{3.3.13}$$

Kovarianssin ominaisuuksia

Olkoot X, Y ja Z satunnaismuuttujia.

(Kov1) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$.

(Kov2) $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y)$.

(Kov3) $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X)$.

(Kov4) $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$.

(Kov5) $\mathrm{Cov}(X + Z, Y) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(Z, Y)$.

Jos a on vakio, niin

(Kov6) $\mathrm{Cov}(X, a) = 0$.

(Kov7) $\mathrm{Cov}(X + a, Y) = \mathrm{Cov}(X, Y)$.

(Kov8) $\mathrm{Cov}(aX, Y) = a\,\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Ominaisuudet (5) ja (8) voidaan yleistää induktiolla tapaukseen, jossa meillä on satunnaismuuttujat $X_1, \ldots, X_n$ ja $Y_1, \ldots, Y_m$ sekä vakiot $a_1, \ldots, a_n$ ja $b_1, \ldots, b_m$:

$$\mathrm{Cov}(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \,\mathrm{Cov}(X_i, Y_j).$$

Kun sovelletaan ominaisuutta (3), saadaan tästä

$$\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Korrelaation ominaisuuksia

Satunnaismuuttujien X ja Y välinen *korrelaatiokerroin*

$$\operatorname{Cor}(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)}},$$

missä $\operatorname{Var}(X) > 0$ ja $\operatorname{Var}(Y) > 0$.

(Kor1) $|\operatorname{Cor}(X,Y)| \leq 1$ kaikilla X ja Y.
Tulos saadaan soveltamalla Cauchyn ja Schwartzin epäyhtälöä satunnaismuuttujiin $\bar{X} = X - E(X)$ ja $\bar{Y} = Y - E(Y)$.

(Kor2) $|\operatorname{Cor}(X,Y)| = 1$ jos ja vain jos $X = aY + b$ joillain vakioilla a ja b.

(Kor3) Olkoot a, b, c ja d sellaisia vakioita, että $ac \neq 0$. Silloin

$$\operatorname{Cor}(aX+b, cY+d) = \begin{cases} \operatorname{Cor}(X,Y), & \text{kun } ac > 0 \\ -\operatorname{Cor}(X,Y), & \text{kun } ac < 0. \end{cases}$$

(Kor4) Jos $ac = 0$, niin $\operatorname{Cor}(aX+b, cY+d)$ ei ole määritelty, koska silloin $\operatorname{Cov}(aX+b, cY+d) = 0$ ja $\operatorname{Var}(aX+b) = 0$ tai $\operatorname{Var}(cY+d) = 0$.

Sanomme, että X ja Y ovat positiivisesti (negatiivisesti) korrelotuneita, jos $\operatorname{Cor} X, Y > 0$ (< 0). X ja Y eivät korreloi, jos $\operatorname{Cov} X, Y = 0$.

3.3.7 Satunnaismuuttujien riippumattomuus

Diskreetit satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomat, jos

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)\, P(Y = y)$$

kaikilla $x \in S_X$ ja $y \in S_Y$. Vastaavasti diskreetit satunnaismuuttujat $X_1, \ldots, X_n$ ovat riippumattomat, jos

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2 \ldots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

kaikilla satunnaismuuttujien arvoilla $x_i \in S_i,\ 1 \le i \le n$, missä S_i on satunnaismuuttujan X_i arvoalue.

Huomattakoon, että diskreetit satunnaismuuttujat $X_1, \ldots, X_n$ ovat riippumattomat, jos ja vain jos

$$P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1)\, P(X_2 \in A_2) \cdots P(X_n \in A_n)$$

kaikilla joukoilla $A_i \subset \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$. Riippumattomien satunnaismuuttujien tapauksessa voidaan siis tapahtumien todennäköisyydet lausua yksittäisten satunnaismuuttujien todennäköisyysfunktioiden avulla.

Riippumattomien satunnaismuuttujien ominaisuuksia

(R1) Jos satunnaismuuttujat $X_1, \ldots, X_n$ ovat riippumattomat, niin minkä tahansa näiden satunnaismuuttujien osajoukon muuttujat ovat riippumattomat. Silloin esimerkiksi satunnaismuuttujat parittain riippumattomat. Toisaalta parittaisesta riippumattomuudesta ei seuraa satunnaismuuttujien $X_1, \ldots, X_n$ riippumattomuus.

(R2) Jos $X_1, \ldots, X_n$ ovat riippumattomat ja $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq$, ovat funktioita, silloin satunnaismuuttujat $g_1(X_1), \ldots, g_n(X_n)$ ovat riippumattomat.

(R3) Jos $X_1, \ldots, X_n$ ovat riippumattomat, niin

$$E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i).$$

(R4) Jos X ja Y ovat riippumattomat, niin $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ ja $\mathrm{Cor}(X, Y) = 0$. Käänteinen tulos ei pidä paikkaansa: Jos $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, niin siitä ei seuraa X:n ja Y:n ovat riippumattomuus.

(R5) Jos $X_1, \ldots, X_n$ ovat riippumattomat, niin

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n).$$

(R6) Jos $X_1, \ldots, X_n$ ovat riippumattomat, niin ehdollinen todennäköisyys

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1} | X_n = x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1})$$

kaikilla $x_i \in S_i,\ 1 \leq i \leq n$.