Matemaattinen tilastotiede
9. harjoitukset, 46. vko 2007

9.1. Olkoon X diskreetti symmetrinen satunnaismuuttuja (X on symmetrinen, jos $P(X = x) = P(X = -x)$ kaikilla x.), $E(X^2) < \infty$ ja $Y = X^2$ (Ks. alaluku 4.6.4). Laske $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Ovatko X ja Y riippumattomat?

9.2. Kana munii X munaa päivässä ja $X \sim \mathrm{Poi}(3.5)$. Munasta kuoriutuu kananpoikanen todennäköisyydellä 0.75. Laske kuoriutuvien kananpoikasten lukumäärän Y odotusarvo. (Vihje: Jos kana munii X munaa, niin kuoriutuvien poikasten lukumäärä $Y \sim \mathrm{Bin}(X, 0.75)$. Ks. alaluku 4.6.3)

9.3. Diskreettien satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman todennäköisyysfunktio (alaluku 4.6) on

$$f(x, y) = k(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}), \text{ kun } x = 1, 2, 3;\ y = 2, 3.$$

Laske vakion k arvo ja todennäköisyys $P(X \geq Y)$.

9.4. Erääseen opiskelijajärjestöön kuului 90 naista ja 30 miestä. Jäsenistöstä päätettiin valita satunnaisesti 5 henkilön komitea järjestämään pikkujoulu. Olkoon X naisten ja Y miesten lukumäärä otoksessa.

(a) Määritä satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman todennäköisyysfunktio (ks. (4.9.3) s. 142).

(b) Määritä reunajakaumien todennäköisyysfunktiot.

9.5. Oletetaan, että satunnaisvektoti (X, Y) noudattaa trinomijakaumaa (ks. s. 141) parametrein $n = 3, p_1 = 1/6$ ja $p_2 = 1/2$ eli $(X, Y) \sim \mathrm{Tri}(3, \frac{1}{6}, \frac{1}{2})$.

(a) Laske odotusarvo $E(X)$ ja varianssi $\mathrm{Var}(Y)$ sekä

(b) korrelaatio $\mathrm{Cor}(X, Y)$.

9.6. Olkoon X vasemmistolaisten ja Y konservatiivien lukumäärä 8:n hengen komiteassa, joka on valittu arpomalla ryhmästä, jossa on 10 vasemmistolaista, 20 konservatiivia sekä 10 riippumatonta. Esitä

(a) X:n ja Y:n yhteisjakauman todennäköisyysfunktio,

(b) Y:n ehdollisen jakauman todennäköisyysfunktio, kun $X = 2$ (Usean muuttujan hypergeometrinen jakauma s. 142).

9.7. Oletetaan, että toisistaan riippumattomat satunnaismuuttujat X ja Y noudattavat geometrista jakaumaa siten, että $X \sim \mathrm{Geo}(1 - \pi_1)$ ja $Y \sim \mathrm{Geo}(1 - \pi_2)$.

(a) Määritä X:n ja Y:n yhteisjakauman todennäköisyysfunktio.

(b) Määritä satunnaismuuttujan $Z = \min\{X, Y\}$ todennäköisyysfunktio (Vihje: Laske ensin $P(Z > n) = P(X > n, Y > n) = P(X > n)P(Y > n)$ ja sitten $P(Z = n)$.)

9.8. Järven vedessä on keskimäärin λ bakteeria litrassa (Bakteerien lukumäärä noudattaa Poissonin jakaumaa). Järvestä otetaan litran, kahden ja neljän litran vesinäytteet (näytteet riippumattomia). Analysoidaan ensin litran näyte. Kahden litran näyte analysoidaan vain, jos litran näytteessä ei ole bakteereita. Neljän litran näyte analysoidaan vain, jos yhden ja kahden litran näytteissä ei ole bakteereita.

(a) Mikä on todennäköisyys, että kaikki 3 näytettä on analysoitava?

(b) Mikä on λ:n arvon vähintään oltava, jotta a-kohdan todennäköisyys on korkeintaan 0.01?