TILTA1 Matemaattinen tilastotiede
8. harjoitukset, 45. viikko 2007
Vastauksia

Huom. merkintä (a nCr b) tarkoittaa ”a yli b:n” eli $\binom{a}{b}$ = (a nCr b) = (a!)/(b!(a–b)!) = $a^{(b)}$/(b!)

8.1 Merk. p = $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ ja q = $\frac{12}{13}$. Nyt W ~ Geo($\frac{1}{13}$), joten $f_W(x) = \frac{1}{13}\left(\frac{12}{13}\right)^{x-1}$, x = 1,2,3, …

$$P(W \geq 10) = \sum_{x=10}^{\infty} \frac{1}{13}\left(\frac{12}{13}\right)^{x-1} = \frac{1}{13}\left(\frac{12}{13}\right)^{9} + \frac{1}{13}\left(\frac{12}{13}\right)^{10} + \frac{1}{13}\left(\frac{12}{13}\right)^{11} + \ldots = \left(\frac{12}{13}\right)^{9}\left[\frac{1}{13} + \frac{1}{13}\left(\frac{12}{13}\right) + \frac{1}{13}\left(\frac{12}{13}\right)^{2} + \ldots\right]$$

$= \left(\frac{12}{13}\right)^{9} \cdot \dfrac{\frac{1}{13}}{1-\frac{12}{13}} = \left(\frac{12}{13}\right)^{9}$, sillä tulon jälkimmäisessä tekijässä on suppeneva geometrinen sarja.

(Vertaa yllä olevaa luentomateriaalin esimerkkiin 4.6 (s. 111). Nyt P(W ≥ 10) = P(W > 9)).

Toisaalta sama ratkaisu voidaan saada myös seuraavasti: P(W ≥ 10) = 1 – P(W ≤ 9)

$$= 1 - \sum_{x=1}^{9} \frac{1}{13}\left(\frac{12}{13}\right)^{x-1} = 1 - \left[\frac{1}{13} + \frac{1}{13}\left(\frac{12}{13}\right) + \ldots + \frac{1}{13}\left(\frac{12}{13}\right)^{8}\right] = 1 - \frac{\frac{1}{13}\left(1-\left(\frac{12}{13}\right)^{9}\right)}{1-\frac{12}{13}} = 1 - \left(1-\left(\frac{12}{13}\right)^{9}\right) = \left(\frac{12}{13}\right)^{9},$$

sillä tässä voidaan hyödyntää geometrista summaa.

8.2 W_{12} ~ NBin(12, 0.8). Siis P(W_{12} = x) = ((x–1) nCr 11)$0.8^{12}0.2^{x-12}$.

(a) P(’Tutkittava täsmälleen 17 pulloa, kunnes ltk täynnä’) = P(W_{12} = 17) = (16 nCr 11)$0.8^{12}0.2^{5}$ ≈ 0.096.

R:llä todennäköisyys voidaan laskea:
```
dnbinom(5,12,0.8)
[1] 0.09605334
```

(b) P(’Tutkittava ainakin 17 pulloa, kunnes ltk täynnä’) = P(W_{12} ≥ 17) = 1 – P(W_{12} < 17)
= 1 – [P(W_{12} = 12) + P(W_{12} = 13) + P(W_{12} = 14) + P(W_{12} = 15) + P(W_{12} = 16)] ≈ 0.202.

R:llä todennäköisyys voidaan laskea:
```
1-pnbinom(4,12,0.8)
[1] 0.2017546
```

8.3 W_5 ~ NBin(5, 0.2). Siis P(W_5 = x) = ((x–1) nCr 4)$0.2^{5}0.8^{x-5}$.

P(’mainesana 3’) = P(W_5 = 5) = (4 nCr 4)0.2^5 ≈ 0.00032
P(’mainesana 2’) = P(W_5 = 6) + P(W_5 = 7) = (5 nCr 4)$0.2^5 0.8$ + (6 nCr 4)$0.2^5 0.8^2$ ≈ 0.00435
P(’mainesana 1’) = P(W_5 = 8) + P(W_5 = 9) = (7 nCr 4)$0.2^5 0.8^3$ + (8 nCr 4)$0.2^5 0.8^4$ ≈ 0.01491
P(’hylätty’) = 1–P(’mainesana 3’)–P(’mainesana 2’)–P(’mainesana 1’) ≈ 0.98042.

8.4 (a) Merk. X = onnettomuuksien lkm/kk. Nyt X ~ Poi(1.5).
P(’ei onnettomuutta tammikuussa’) = P(X=0) = ($e^{-1.5}1.5^0$)/(0!) = $e^{-1.5}$ ≈ 0.22313.

R:llä todennäköisyys voidaan laskea:
```
dpois(0,1.5)
[1] 0.2231302
```

(b) Merk. X_1 = onnettomuuksien lkm helmikuussa, X_1 ~ Poi(1.5) ja
X_2 = onnettomuuksien lkm maaliskuussa, X_2 ~ Poi(1.5). X_1 ja X_2 riippumattomat.
Lisäksi merk. Y = X_1 + X_2. Nyt Y ~ Poi(1.5+1.5) eli Y ~ Poi(3).
P(’yhteensä neljä onnettomuutta helmi- ja maaliskuussa’) = P(Y = 4) = ($e^{-3}3^4$)/(4!) ≈ 0.16803.

R:llä todennäköisyys voidaan laskea:
```
dpois(4,3)
[1] 0.1680314
```

8.5 (a) P(X=m | X+Y=10) = (10 nCr m)$(\frac{1}{4})^m(\frac{3}{4})^{10-m}$. Siis X | X+Y=10 ~ Bin(10, $\frac{1}{4}$).

Tällöin E(X | X+Y=10) = 10·$\frac{1}{4}$ = 2.5.

(b) P(Y=k | X+Y=10) = (10 nCr k)$(\frac{3}{4})^k(\frac{1}{4})^{10-k}$. Siis Y | X+Y=10 ~ Bin(10, $\frac{3}{4}$). Tällöin

P(Y > 5 | X+Y=10) = 1 – P(Y ≤ 5 | X+Y=10) = 1 – $\sum_{y=0}^{5}(10\ nCr\ y)\left(\frac{3}{4}\right)^y\left(\frac{1}{4}\right)^{10-y}$ ≈ 0.92187.

R:llä: `1-pbinom(5,10,3/4)` tai `sum(dbinom(6:10,10,3/4))`

```
[1] 0.9218731                 [1] 0.9218731
```

8.6 Momenttifunktio on $M(t) = \exp(\lambda e^t - \lambda)$, joten $M'(t) = \lambda e^t \cdot \exp(\lambda e^t - \lambda)$.

Tästä saadaan $E(X) = M'(0) = \lambda e^0 \cdot \exp(\lambda e^0 - \lambda) = \lambda$.

Määritelmän avulla:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} = e^{-\lambda}\lambda \cdot \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \overset{\Delta}{=} e^{-\lambda}\lambda \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \overset{\Delta\Delta}{=} e^{-\lambda}\lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda .$$

$^{\Delta}$) merkitään *i* = *x*–1

$^{\Delta\Delta}$) eksponenttifunktion sarjakehitelmä (ks. luentomateriaali (4.4.2))

8.7 Ks. tiedosto H8mtt07_7_R.txt

8.8 Saadaan laskettua R:llä seuraavasti:

```
lk <- 1.49 # kotijoukkueen keskimäär. maalimäärä (lambda)
lv <- 1.16 # vierasjoukkueen keskimäär. maalimäärä (lambda)
x <- 0:9 # tarkasteltavat maalimäärät
pk <- dpois(x,lk) # kotijoukkueen maalien lkm:n todennäköisyydet
pv <- dpois(x,lv) # vierasjoukkueen maalien lkm:n todennäköisyydet
pp <- pk%*%t(pv) # todennäköisyydet p_ij sisältävän matriisin muodostus

# a #

# tasapelin tn
sum(diag(pp))
[1] 0.2568374

# b #

# kotivoiton tn
sum(pp[lower.tri(pp)])
[1] 0.4478988

# Vastaavasti vierasvoiton tn saadaan laskemalla
sum(pp[upper.tri(pp)])
[1] 0.2952595
```