Matemaattinen tilastotiede
8. harjoitukset, 45. vko 2007

8.1. Valitaan palauttaen tavallisesta korttipakasta kortteja yksitellen, kunnes saadaan ässä. Mikä on todennäköisyys, että tarvitaan ainakin 10 nostoa?

8.2. Liukuhihnalta tulevat pullot ovat vikaantuneita, toisistaan riippumatta, todennäköisyydellä 0.2. Hihnalta tulevat pullot tarkistetaan, vikaantuneet poistetaan ja loput pakataan 12 pullon laatikoihin.

(a) Millä todennäköisyydellä on tutkittava täsmälleen 17 pulloa, kunnes laatikko saadaan täyteen?

(b) Ainakin 17 pulloa, kunnes laatikko saadaan täyteen?

(Negatiivinen binomijakauma)

8.3. Monivalintatestissä mainesana määräyryy sen mukaan, montako yritystä testattava tarvitseen 5:n oikean vastauksen saamiseen. Jokaisessa kysymyksessä on 5 vaihtoehtoa, joista täsmälleen yksi on oikea. Jos testattava tarvitsee vain 5 yritystä, mainesna on 3. Jos yrityksiä on 6 tai 7, mainesana on 2, 8 tai 9 yritystä antaa mainesanan 1. Yli 9 yritystä on hylätty 0. Määritä mainesanan todennäköisyysjakauma, kun testattava on arvaaja. (Negatiivinen binomijakauma)

8.4. Suurella rakennustyömaalla sattuu keskimäärin 1.5 onnettomuutta kuukaudessa. Määritä seuraavien tapahtumien todennäköisyydet:

(a) Ei onnettomuuksia tammikuussa,

(b) yhteensä neljä onnettomuutta helmikuussa ja maaliskuussa,

(Vihje: Käytä Poissonin jakaumaa)

8.5. Oletetaan, että vakavien (X) ja lievien (Y) onnettomuuksien lukumäärät ovat toisistaan riippumattomat, $X \sim$Poi(1) ja $Y \sim$Poi(3) (Esimerkki 4.8). Havaitaan, että $X + Y = 10$. Laske

(a) $E(X \mid X + Y = 10)$ ja

(b) $P(Y > 5 \mid X + Y = 10)$.

8.6. Laske Poissonin jakauman odotusarvo momenttifunktion avulla ja suoraan määritelmän nojalla.

8.7. Olkoon $X \sim \text{Bin}(200, 0.01)$ ja $Y \sim \text{Poi}(E(X))$. Vertaile numeerisesti (esimerkiksi `R`:llä) todennäköisyyksiä $P(X = x)$ ja $P(Y = x)$, $x = 0, 1, 2, \ldots$.

8.8. Englannin valioliigassa (kausilla 2003/2004 ja 2004/2005) kotijoukkueen maalimäärän keskiarvo oli 1.49 ja vierasjoukkueen maalimäärän keskiarvo 1.16. Oletetaan, että kotijoukkueen maalimäärä X noudattaa Poissonin jakaumaa Poi(1.49) ja vierasjoukkueen maalimäärä Poissonin jakaumaa Poi(1.16). Oletetaan, että tuloksen $(X = i, Y = j)$ (Kotijoukkue tekee i ja vierasjoukkue j maalia.) todennäköisyys p_{ij} saadaan kaavalla

$$p_{ij} = P(X = i)P(Y = j).$$

(a) Laske tasapelin $P(X = Y)$ ja

(b) kotivoiton $P(X > Y)$ todennäköisyys.

(Ohje: Riittää tarkastella maalimääriä $0 : 9$, koska sitä suurempien maalimäärien todennäköisyys on käytännössä 0. R:llä lasketaan `lk<-1.49; lv<-1.16; x<-0:9; pk<-dpois(x,lk); pv<-dpois(x,lv); pp<-pk%*%t(pv)`. 10×10-matriisissa pp ovat nyt todennäköisyydet p_{ij}. Matriisin alakolmio, yläkolmio ja diagonaali saadaan komennoilla `pp[lower.tri(pp)]`, `pp[upper.tri(pp)]`, `diag(pp)`.)