TILTA1 Matemaattinen tilastotiede
7. harjoitukset, 44. viikko 2007
Vastauksia

Huom. merkintä (a nCr b) tarkoittaa ”a yli b:n” eli $\binom{a}{b}$ = (*a* nCr *b*) = (*a*!)/(*b*!(*a*–*b*)!) = $a^{(b)}$/(*b*!)

7.1 X ~ Ber(p). Siis P(X=1) = p ja P(X=0) = 1–p.
Lisäksi tiedetään, että P(X = 0) = P(Y = –1) = 1–p ja P(X = 1) = P(Y = 1) = p.

Kun X = 0, niin Y = a·0 + b = b
Kun X = 1, niin Y = a·1 + b = a + b $\Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a + b = 1 \end{cases}$

Siis a = 2 ja b = –1, eli Y = 2X – 1.
Var(Y) = Var(2X – 1) = Var(2X) = 2^2·Var(X) = 4p(1–p).

Huomautus. Arvot a:lle ja b:lle voidaan määrittää myös seuraavan yhtälöparin avulla:

$\begin{cases} ap + b = 2p - 1 & \text{(E(Y):n perusteella)} \\ a^2p(1-p) = 4p(1-p) & \text{(Var(Y):n perusteella)} \end{cases}$

Tässä ollaan kuitenkin kiinnostuneita ratkaisusta, joka pätee kaikilla p:n arvoilla. Tällöin päädytään samaan ratkaisuun kuin yllä, eli a = 2 ja b = –1, ja Var(Y)=4p(1–p).

7.2 (a) M(t) = $\frac{2}{5}e^t + \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{3t}$

(b) M’(t) = $\frac{2}{5}e^t + \frac{2}{5}e^{2t} + \frac{6}{5}e^{3t}$ ja M’’(t) = $\frac{2}{5}e^t + \frac{4}{5}e^{2t} + \frac{18}{5}e^{3t}$, joten
E(X) = M’(0) = 2 ja Var(X) = M’’(0) – [M’(0)]^2 = $\frac{4}{5}$

7.3 $$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x\cdot\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n}\frac{n!}{(x-1)!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x} = np\sum_{x=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!}p^{x-1}(1-p)^{n-x}$$

$$= np\sum_{x=1}^{n}\binom{n-1}{x-1}p^{x-1}(1-p)^{n-x} \overset{\Delta}{=} np\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^i(1-p)^{(n-1)-i} \overset{\Delta\Delta}{=} np\left[p+(1-p)\right]^{n-1} = np$$

$^{\Delta}$) merkitään *i*=*x*–1 eli *x* = *i*+1, *n*–*x* = (*n*–1)–*i*

$^{\Delta\Delta}$) sovelletaan binomilausetta $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

Var(*X*) = *E*(X^2) – [*E*(*X*)]^2 = (n^2p^2 – np^2 + *np*) – $(np)^2$ = *np*(1–*p*)

7.4 $M(t) = (1-p+pe^t)^n$, $M'(t) = npe^t(1-p+pe^t)^{n-1}$ ja
$M''(t) = npe^t(1-p+pe^t)^{n-1} + n(n-1)p^2(e^t)^2(1-p+pe^t)^{n-2}$.
$M'(0) = np = E(X)$ ja $M''(0) = np + n(n-1)p^2 = n^2p^2 - np^2 + np = E(X^2)$.
$Var(X) = M''(0) - \left[M'(0)\right]^2 = np(1-p)$.

7.5 $\{Z_i=1\} \Leftrightarrow \{X_i=1\}\cap\{X_{i+1}=1\}$. Lisäksi tiedetään, että X_i ja X_{i+1} riippumattomia ja i = 1, …, n–1.
Siis $P(\{Z_i=1\}) = P(\{X_i=1\}\cap\{X_{i+1}=1\}) = P(\{X_i=1\})\cdot P(\{X_{i+1}=1\}) = p^2$.
Tästä seuraa, että $P(\{Z_i=0\}) = 1 - p^2$. Siis $E(Z_i) = 1\cdot p^2 + 0\cdot(1 - p^2) = p^2$.

(a) $E(Z) = E(Z_1+Z_2+ \dots +Z_{n-1}) = E(Z_1) + E(Z_2) + \dots + E(Z_{n-1}) = (n-1)p^2$.

(b) $E(Z) = 199\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{199}{4}$ (≈ 50).

Nyt $Z_i=1$ osoittaa, että kohdassa i, i+1 on toistos RR (eli kaksi kruunua peräkkäin).
E(Z) tarkoittaa toistosten RR odotusarvoa jonossa.

7.6 Merk. X = ”oikean päätöksen tekevien valamiesten lukumäärä”. Nyt $X \sim Bin(3,p)$.
Kolmen hengen valamiehistö päättää oikein, jos $X \geq 2$. Siis tarkastellaan todennäköisyyttä
$P(X \geq 2) = (3 \text{ nCr } 2)p^2(1 - p)^1 + (3 \text{ nCr } 3)p^3(1 - p)^0 = 3p^2 - 2p^3$.

1) Koska yksi valamies päättää oikein tn:llä p, niin kolmen hengen valamiehistö on parempi jos ja vain jos $3p^2 - 2p^3 > p \Leftrightarrow -2p^3 + 3p^2 - p > 0$.
Merk. $h(p) = -2p^3 + 3p^2 - p$. Nyt $h(p) = 0 \Leftrightarrow p=0$ tai $p=1$ tai $p=\frac{1}{2}$.
Siis nollakohtien avulla h(p) voidaan ilmaista $h(p) = -2p(p-1)(p-\frac{1}{2}) = p(1-p)(2p-1)$.
Kun ollaan kelvollisten ratkaisujen alueella ($0 < p < 1$), niin $p > 0$ ja $1-p > 0$.
Lisäksi $2p-1 > 0$, kun $p > \frac{1}{2}$.
Siis kolmen hengen valamiehistö parempi, jos $\frac{1}{2} < p < 1$.

2) Vastaavasti yksi valamies on parempi, jos $0 < p < \frac{1}{2}$.

3) Vaihtoehdot ovat yhtä hyviä, jos $p = \frac{1}{2}$ (Vaihtoehdot ovat yhtä hyviä myös silloin kun p=0 tai p=1, mutta nämä eivät ole mielenkiintoisia tilanteita).

7.7 Momenttifunktio määrittää jakauman yksikäsitteisesti.

(a) Kun $X \sim Ber(p)$, niin $M(t) = 1 - p + pe^t$. Nyt $X \sim Ber(2/3)$.
$P(X=1) = 2/3$, $P(X=0) = 1/3$. Tällöin $E(X) = 2/3$ ja $Var(X) = 2/9$.

(b) Kun $X \sim Bin(n,p)$, niin $M(t) = (1 - p + pe^t)^n$. Nyt $X \sim Bin(12, 3/4)$.
$P(X=x) = (12 \text{ nCr } x)(3/4)^x(1/4)^{12-x}$. Tällöin $E(X) = 9$ ja $Var(X) = 9/4$.

Huomautus. Odotusarvo ja varianssi voidaan määrittää a- ja b-kohdissa myös momenttifunktion avulla.
Esim. a-kohdassa $M'(t) = M''(t) = (2/3)e^t$, jolloin $E(X) = M'(0) = 2/3$ ja $Var(X) = M''(0) - [M'(0)]^2 = 2/9$.
Vastaavasti b-kohdassa.

7.8 Nyt $K'(t) = \dfrac{M'(t)}{M(t)}$, ja tällöin $K'(0) = \dfrac{M'(0)}{M(0)} = M'(0) = E(X)$, koska $M(0) = E(e^{0\cdot X}) = 1$.

$K''(t) = \dfrac{M''(t)\cdot M(t) - [M'(t)]^2}{[M(t)]^2}$ ja edelleen voidaan hyödyntää $M(0) = E(e^{0\cdot X}) = 1$, joten

$$K''(0) = \frac{M''(0)\cdot M(0) - [M'(0)]^2}{[M(0)]^2} = M''(0) - [M'(0)]^2 = Var(X).$$