

## Matemaattinen tilastotiede

### 7. harjoitukset, 44. viikko 2007

- 7.1. Oletetaan, että  $X$  noudattaa Bernoullin jakaumaa  $\text{Ber}(p)$ . Määritellään sellainen satunnaismuuttuja  $Y = aX + b$ , että  $P(Y = 1) = p$  ja  $P(Y = -1) = 1 - p$  ( $a$  ja  $b$  vakioita). Määritä  $a$  ja  $b$ . Laske  $\text{Var}(Y)$ .
- 7.2. Olkoon  $f_X(1) = f_X(3) = \frac{2}{5}$ ,  $f_X(2) = \frac{1}{5}$  satunnaismuuttujan  $X$  todennäköisyysfunktio.
- Mikä on  $X$ :n momenttifunktio?
  - Määritä  $X$ :n odotusarvo ja varianssi momenttifunktion avulla.
- 7.3. Olkoon  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ . Laske  $E(X)$  ja  $\text{Var}(X)$  suoraan määritelmien nojalla, kun tiedetään  $E(X^2) = n^2p^2 - np^2 + np$ .
- 7.4. Laske binomijakauman  $\text{Bin}(n, p)$  odotusarvo ja varianssi momenttifunktion avulla derivoimalla (Laske binomijakauman momenttifunktion  $M(t)$  1. ja 2. derivaatta pisteessä  $t = 0$ ).
- 7.5. Heitetään lanttia  $n$  kertaa ( $n$  riippumatonta Bernoullin koetta). Olkoon kruunun ( $R$ ) todennäköisyys  $p$  jokaisessa heitossa. Satunnasimuuttuja  $X_i = 1$ , kun kruunu  $i$ . heitossa, muutoin  $X_i = 0$ . Määritellään satunnaismuuttujat  $Z_i$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$  siten, että  $Z_i = X_i X_{i+1}$ . Olkoon  $Z = Z_1 + \dots + Z_{n-1}$ .
- Laske  $E(Z)$ .
  - Mitä on  $E(Z)$ :n arvo, kun  $p = \frac{1}{2}$  ja  $n = 200$ ? Miten tulkitset tuloksen?
- (Vihje: Katso Esimerkki 4.3)
- 7.6. Oletetaan, että valamiehistön jäsenet tekevät päätöksensä toisistaan riippumatta ja jokainen tekee oikean päätöksen todennäköisyydellä  $p$ . Jos enemmistön päätös jää voimaan, niin onko kolmen henkilön valamiehistö vai yksittäinen valamies parempi päättäjä.
- 7.7. Määritä satunnaismuuttujan  $X$  todennäköisyysfunktio, odotusarvo ja varianssi, kun sen momenttifunktio (Huom., että momenttifunktio määrittää jakauman yksikäsitteisesti) on
- $M(t) = 1/3 + (2/3)e^t$ .
  - $M(t) = [1/4 + (3/4)e^t]^{12}$ .
- 7.8. Kumulantteja generoiva funktio on  $K(t) = \log M(t)$ , missä  $M(t)$  on  $X$ :n momenttifunktio. Osoita derivoimalla ja momenttifunktion ominaisuuksiin nojautuen, että  $K'(0)$  on  $X$ :n odotusarvo ja  $K''(0)$  varianssi.