Matemaattinen tilastotiede
6. harjoitukset, 42. vko 2007

6.1. Olkoon $E(X) = E(Y) = 1, \mathrm{Var}(X) = 2, Var(Y) = 5$ ja $\mathrm{Cov}(X, Y) = 3$. Laske

(a) $\mathrm{Var}(X + Y)$ ja $\mathrm{Var}(X - Y)$

(b) $\mathrm{Var}(X - X)$ ja $\mathrm{Cov}(X, -X)$

(c) $E(XY)$ ja $\mathrm{Cov}(2X - 1, -3Y + 9)$.

6.2. Jos X noudattaa binomijakaumaa (alaluku 2.8 s. 42 ja s. 82), jonka odotusarvo on 6 ja varianssi 2.4, niin mitä on $P(X = 5)$? ($E(X) = np, \mathrm{Var}(X) = np(1 - p)$).

6.3. A, B ja C ampuvat maaliin 20 laukausta. Yhden laukauksen osumistodennäköisyys on A:lla 0.4, B:llä 0.3, C:llä 0.1 ja laukaukset ovat toisistaan riippumattomat. Olkoot X_A, X_B ja X_C vastaavasti A:n, B:n ja C:n osumien lukumäärät. Satunnaismuuttujat X_A, X_B ja X_C noudattavat binomijakaumaa. Osumien kokonaismäärä on $X = X_A+X_B+X_C$. Laske $E(X)$ ja $\mathrm{Var}(X)$. (Ks. apulauseet 3.2 ja 3.3)

6.4. Systeemi koostuu n:stä toisistaan riippumattomasta komponentista, joista kukin toimii todennäköisyydellä p. Toimivien komponenttien lukumäärä nudattaa binomijakaumaa. Systeemi toimii, jos ainakin puolet komponenteista toimii. Millä p:n arvoilla 5:n komponentin systeemin todennäköisyys toimia on suurempi kuin 3:n komponentin systeemin toimintatodennäköisyys?

6.5. Oletetaan, että 15%:lla tietyn alueen ankoista on influenssavirus. Valitaan alueelta 15 ankan satunnaisotos. Olkoon X viruksen kantajien lukumäärä otoksessa.

(a) Mitä jakaumaa X noudattaa? (ks. alaluku 2.6.1 s.39, Esimerkki 3.11, s. 64)

(b) Laske todennäköisyys, että otoksessa *(i)* ei ole yhtään , *(ii)* on ainakin kaksi viruksen kantajaa, jos alueella on 1000 ankkaa.

(c) Toista b-kohdan laskelmat, jos ankkoja on 5000.

6.6. Voidaan osoittaa, että hypergeometrinen todennäköisyys (ks. kaava (3.3.6) s. 64) $P(X = x; N, n, p)$ lähestyy binomitodennäköisyyttä $\binom{n}{x}p^x(1 - p)^{n-x}$, kun N ja a kasvavat rajatta siten, että $a/N \to p$ $(0 < p < 1)$. Silloin suurilla N:n arvoilla hypergeometrinen todennäköisyys voidaan arvioida binomitodennäköisyyden avulla. Tarkastele likiarvon tarkkuutta numeerisesti tehtävän 5 tapauksessa $(p = a/N)$, kun *(a)* $N = 100$, *(b)* $N = 500$ ja *(c)* $N = 1000$.

6.7. Olkoot X ja Y kaksi diskreettiä satunnaismuuttujaa, joilla on sama arvojoukko $S = \{a_1, a_2, a_3\}$, missä a_1, a_2, a_3 ovat eri reaalilukuja. Oletetaan, että $E(X^r) = E(Y^r), r = 1, 2$. Näytä, että X ja Y noudattavat samaa jakaumaa, ts. $P(X = a_i) = P(Y = a_i), i = 1, 2, 3$.

6.8. Tehdään 30 perunan otos suuresta perunaerästä laadun tarkkailua varten. Otoksessa oli 2 pilaantunutta. Olkoon pilaantuneiden lukumäärä otoksessa X (binomijakauma). Todennäköisyys $P(X = 2; 30, p) = f_X(2; 30, p)$ riippuu tuntemattomasta pilaantuneiden suhteellisesta osuudesta perunapopulaatiossa. Määritä p:n arvo siten, että todennäköisyys $f_X(2; 30, p)$ maksimoituu.