TILTA1 Matemaattinen tilastotiede
5. harjoitukset, 41. viikko 2007
Vastauksia

Huom. merkintä (a nCr b) tarkoittaa ”a yli b:n” eli (a nCr b) = (a!)/(b!(a–b)!) = $a^{(b)}$/(b!)

5.1 Merk. x = yhtiön perimä vakuutusmaksu,
a = yhtiön maksama korvaus, jos A sattuu, ja P(A)=p. Lisäksi P(A^C) = 1–p.
Yhtiön saama voitto, jos A tapahtuu: x–a.
Yhtiön saama voitto, jos A ei tapahdu: x.
Nyt E(voitto) = p(x–a) + (1–p)x = 0.05a. Siis x = (0.05+p)a.

5.2 (a) $f_X(x)$ = (6 nCr x)$p^x(1-p)^{6-x}$, kun x = 0,1,2,3,4,5,6 ja
$f_Y(y)$ = (6 nCr y)$(1-p)^y p^{6-y}$, kun y = 0,1,2,3,4,5,6.
{X=Y} ⇔ {X=Y=3} ⇔ {X=3}⇔ {Y=3}.
P(X=Y) = $f_X(3)$ = (6 nCr 3)$p^3(1-p)^3$= $20p^3(1-p)^3$.

(b) Nyt $f_X(x) = f_Y(x)$, kaikilla x = 0,1,2,3,4,5,6 ⇔ p = 1/2.
Siis X~Y, kun p = 1/2.

5.3 (a) 1) $f(x) > 0$, kun $x \in S_X$.
2) $f(x) = 0$, kun $x \notin S_X$.
3) $\sum_{x\in S_x} f(x) = f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) = 1$

(b) E(X) = $\sum_{x\in S_x} x\cdot f(x) = (-2)\cdot f(-2) + (-1)\cdot f(-1) + ... + 2\cdot f(2) = 0$.

E(|X|) = $\sum_{x\in S_x} |x|\cdot f(x) = |-2|\cdot f(-2) + |-1|\cdot f(-1) + ... + |2|\cdot f(2) = \frac{44}{27}$.

$E(2X^2 - 5X + 7) = 2\cdot E(X^2) - 5\cdot E(X) + 7 = 2\cdot\left(\sum_{x\in S_x} x^2\cdot f(x)\right) - 5\cdot 0 + 7 = 2\cdot\frac{80}{27} + 7 = \frac{349}{27}$.

5.4 Määritelmän mukaan E(X) = $\frac{1+2+...+N}{N} = \frac{N(N+1)/2}{N} = \frac{N+1}{2}$, ja

$E(X^2) = \frac{1^2+2^2+...+N^2}{N} = \frac{N(N+1)(2N+1)/6}{N} = \frac{(N+1)(2N+1)}{6}$, joten määritelmän mukaan

$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 = ... = \frac{(N+1)(N-1)}{12} = \frac{N^2-1}{12}$.

Lisäksi $\sigma_x = \sqrt{\frac{N^2-1}{12}}$.

5.5 $E(X(X-2)) = E(X^2) - 2\cdot E(X) = E(X^2) - 2\cdot 1 \overset{oletus}{=} 3 \Rightarrow E(X^2) = 5$.
$\mathrm{Var}(-3X+5) = \mathrm{Var}(-3X) = 9\cdot\mathrm{Var}(X) = 9\cdot(5 - 1^2) = 9\cdot 4 = 36$.

5.6 (a) E(X) = 1/5·(5+10+15+20+25) = 15
$E(X^2) = 1/5\cdot(5^2+10^2+15^2+20^2+25^2) = 275$, joten Var(X) = 275 – 15^2 = 50.
(b) E(X) = f(1)·1 + f(2)·2 + f(3)·3 = 5/3,
$E(X^2) = f(1)\cdot 1^2 + f(2)\cdot 2^2 + f(3)\cdot 3^2 = 10/3$, joten Var(X) = 10/3 – $(5/3)^2$ = 5/9.

5.7 (a) $E(X^2) = (-1)^2 \cdot P(X = -1) + 0^2 \cdot P(X = 0) + 1^2 \cdot P(X = 1) = ... = 0.5$

(b)

$$X_+ = \begin{cases} 0, \text{ kun } X = -1 \\ 0, \text{ kun } X = 0 \\ 1, \text{ kun } X = 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow P(X_+ = 0) = P(X = -1) + P(X = 0) = 0.7 \\ &\Rightarrow P(X_+ = 1) = P(X = 1) = 0.3 \end{aligned}$$

Siis $E(X_+) = 0 \cdot P(X_+ = 0) + 1 \cdot P(X_+ = 1) = 0.3$

Vastaavasti:

$$X_- = \begin{cases} 1, \text{ kun } X = -1 \\ 0, \text{ kun } X = 0 \\ 0, \text{ kun } X = 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow P(X_- = 1) = P(X = -1) = 0.2 \\ &\Rightarrow P(X_- = 0) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.8 \end{aligned}$$

Siis $E(X_-) = 0 \cdot P(X_- = 0) + 1 \cdot P(X_- =1) = 0.2$

$\Rightarrow E(X_+ - X_-) = E(X_+) - E(X_-) = 0.3 - 0.2 = 0.1$

Huomautus.
Edellinen tulos olisi voitu laskea myös suoraan:
$E(X_+ - X_-) = E(X_+) - E(X_-)$
$= [0 \cdot P(X = -1) + 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1)] - [1 \cdot P(X = -1) + 0 \cdot P(X = 0) + 0 \cdot P(X = 1)]$
$= [0 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.3] - [1 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.3] = 0.3 - 0.2 = 0.1$

$(X_+ - X_-)$:n ja X:n välinen yhteys?
Huomataan, että $(X_+ - X_-) = X$ ja täten $E(X_+ - X_-) = E(X) = 0.1$

5.8 (a) $E(X) = \sum_{x=1}^{n} x \cdot f(x) = 1 \cdot f(1) + 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3) + ... + n \cdot f(n)$.

Järjestellään odotusarvon lausekkeessa yhteenlaskettavia:

$$n \text{ kpl} \begin{cases} P(X \geq 1) = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) \\ P(X \geq 2) = f(2) + f(3) + \ldots + f(n) \\ P(X \geq 3) = f(3) + \ldots + f(n) \\ \quad \vdots \\ P(X \geq n) = f(n) \end{cases}$$

Kun yllä olevat tekijät lasketaan yhteen, huomataan, että

$$E(X) = \sum_{x=1}^{n} \left(\sum_{i=x}^{n} f(i) \right) = \sum_{x=1}^{n} P(X \geq x).$$

(b) Nyt $E(X) = 0 \cdot f(0) + \sum_{x=1}^{n} x \cdot f(x) = \sum_{x=1}^{n} P(X \geq x)$.