

Matemaattinen tilastotiede

5. harjoitukset, 41. vko 2007

5.1. Vakuutusyhtiö maksaa korvausta a euroa, jos tapahtuma A sattuu. Olkoon $P(A) = p$, $0 \leq p \leq 1$. Paljonko pitää periä vakuutusmaksua, jotta yhtiön odotettu voitto on 5% vakuutussummasta ($= a$)?

5.2. Heitetään lanttia 6 kertaa (6 riippumatonta Bernoullin koetta). Olkoon X kruunujen ja Y klaavojen lukumäärä ja kruunun todennäköisyys yhdessä heitossa on p .

(a) Laske $P(X = Y)$.

(b) Milloin X ja Y noudattavat samaa jakaumaa?

(Vihje: Katso Esimerkit 3.15 ja 3.16)

5.3. Olkoon satunnaismuuttujan X arvojoukko $S_X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

(a) Osoita, että funktio $f(x) = (|x|+1)^2/27$ on $X : n$ todennäköisyysfunktio.

(b) Laske $E(X)$, $E(|X|)$ ja $E(2X^2 - 5X + 7)$.

5.4. Valitaan satunnaisesti kokonaisluku (satunnaasiluku) joukosta $\{1, 2, \dots, N\}$. Olkoon valinnan tulos X . Laske $E(X)$, $\text{Var}(X)$ ja σ_X (X :n hajonta).

5.5. Olkoon X sellainen diskreetti satunnaismuuttuja, että $E(X) = 1$ ja $E[X(X - 2)] = 3$. Laske $\text{Var}(-3X + 5)$.

5.6. Määritä seuraavien diskreettien jakaumien odotusarvo ja varianssi:

(a)

$$f(x) = \frac{1}{5}, \quad \text{kun } x = 5, 10, 15, 20, 25.$$

(b)

$$f(x) = \frac{4-x}{6}, \quad \text{kun } x = 1, 2, 3.$$

5.7. Olkoon diskreetin satunnaismuuttujan X arvojoukko $S_X = \{-1, 0, 1\}$ ja

$$P(X = -1) = 0.2, P(X = 0) = 0.5, P(X = 1) = 0.3.$$

Määritellään satunnaismuuttujat $X_+ = \max(X, 0)$ ja $X_- = \max(-X, 0)$. Laske

(a) $E(X^2)$ ja

(b) $E(X_+ - X_-)$. Mikä on $(X_+ - X_-)$:n ja X :n välinen yhteys?

5.8. Olkoon diskreetin satunnaismuuttujan X arvojoukko $S_X = \{1, 2, \dots, n\}$, ts. $f_X(x) > 0$, kun $x \in S_X$ ja 0 muualla.

- (a) Näytä, että $E(X) = \sum_{x=1}^n P(X \geq x)$. (Kirjoita ”auki”määritelmän mukainen odotusarvon lauseke ja järjestele yhteenlaskettavat sopivasti.)
- (b) Päättele, että $E(X) = \sum_{x=1}^n P(X \geq x)$ silloinkin, kun $S_X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$.