

TILTA1 Matemaattinen tilastotiede

4. harjoitukset, 40. viikko 2007

Vastauksia

4.1 Huomaa, että kokonaistodennäköisyys on $P(B) = P(T_1) \cdot P(B|T_1) + P(T_2) \cdot P(B|T_2) = 0.023$.

$$\text{Nyt } P(T_i | B) = \frac{P(T_i) \cdot P(B | T_i)}{P(B)}, \text{ kun } i = 1, 2.$$

Siis $P(T_1|B) = 0.004/0.023 \approx 0.1739$ ja $P(T_2|B) = 0.019/0.023 \approx 0.8261$.

4.2 Tiedetään, että $P(B|A) = 1$ ja $P(B|A^C) = 0.01$. Käytetään Bayesin kaavaa

$$P(A | B) = \frac{P(A) \cdot P(B | A)}{P(A) \cdot P(B | A) + P(A^C) \cdot P(B | A^C)} = \frac{P(A) \cdot 1}{P(A) \cdot 1 + P(A^C) \cdot 0.01}$$

Kun $P(A) = 0.5$, niin $P(A^C) = 0.5 \Rightarrow P(A|B) \approx 0.990$.

Kun $P(A) = 0.001$, niin $P(A^C) = 0.999 \Rightarrow P(A|B) \approx 0.091$.

4.3 $\Omega = \{PP, TT, TP, PT\}$, $A = \{PP, PT\}$, $B = \{TP, PT\}$, $C = \{TP, TT\}$, $D = \{TP, PP\}$.

A ja B ovat riippumattomat, koska $1/4 = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$.

A ja C eivät ole riippumattomat, koska $0 = P(A \cap C) \neq P(A) \cdot P(C) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$.

B ja C ovat riippumattomat, koska $1/4 = P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$.

4.4 $E(X) = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) = P(X=1) = c$. Edelleen $P(X=0) = 1-c$.

4.5 (a) X^2 saa arvot 0 ja 1. Tiedetään, että $X^2 = 0 \Leftrightarrow X = 0$.

Oletuksen mukaan $P(X=0) = 1/2$, joten $P(X^2 = 0) = 1/2 \Rightarrow P(X^2 = 1) = 1/2$.

Siis $E(X^2) = 0 \cdot P(X^2 = 0) + 1 \cdot P(X^2 = 1) = 0 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/2 = 1/2$.

(b) $E(X) = 1/6 \Leftrightarrow (-1) \cdot f(-1) + 0 \cdot 1/2 + 1 \cdot f(1) = 1/6$.

Toisaalta tiedetään, että $f(-1) + 1/2 + f(1) = 1$.

Näiden kahden yhtälön muodostaman yhtälöparin ratkaisuksi saadaan

$f(-1) = 1/6$ ja $f(1) = 1/3$.

$$4.6 \text{ (a) } E(X) = \sum_{x=51}^{100} x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-50} = 52. \quad \text{(b) } E\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{x=51}^{100} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-50} = 0.01924426 \left(\neq \frac{1}{52}\right).$$

Tulokset voidaan laskea R:llä esimerkiksi seuraavasti:

```
x <- 51:100
p <- (1/2)^(x-50)
# a)
sum(p*x)
# b)
ix <- 1/x
sum(p*ix)
```

4.7 Merk. $A = \{1. \text{ pallo on valkoinen}\}$ ja $B = \{2. \text{ pallo on valkoinen}\}$.

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(A^C)P(B|A^C) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b-1} = \dots = \frac{a}{a+b}.$$

4.8 Katso H4mtt07_4.8_esimerkki.pdf (R-esimerkki tuloksineen ja selityksineen) ja

H4mtt07_4.8_R.txt (R-koodi): <http://mtl.uta.fi/tilasto/mtt07/Harjoitukset07>