Matemaattinen tilastotiede
4. harjoitukset, 40. viikko 2007

4.1. Oletetaan, että henkilöllä ei voi olla tauteja T_1 ja T_2 samanaikaisesti. Lisäksi oire B voi ilmetä vain T_1:n tai T_2:n aiheuttamana. Oireiden ehdolliset todennäköisyydet ovat $P(B|T_1) = 0.8$ ja $P(B|T_2) = 0.95$. Tautien esiintymistodennäköisyydet populaatiossa ovat $P(T_1) = 0.005$ ja $P(T_2) = 0.02$. Potilaalla havaitaan oire B. Millä todennäköisyydellä hän sairastaa tautia $T_i,\ i = 1, 2$. (Bayesin kaava)

4.2. Isyystestissä miehellä havaitaan geneettin merkki, joka esiintyy prosentilla aikuisista miehistä. Jos isällä on merkki, niin lapsella on merkki varmasti. Tarkastele Bayesin kaavan avulla tapahtuman $A \equiv$ "mies on isä" todennäköisyyttä, kun tapahtuma $B \equiv$ "lapsella on merkki" on sattunut. Voit olettaa, että $P(B|A^c) = 0.01$. Tarvitset subjektiivisen ennakkotodennäköisyyden $P(A)$, jotta voit laskea posterioritodennäköisyyden $P(A|B)$. Kokeile ennakkotodennäköisyyksiä $P(A) = 0.5$ ja $P(A) = 0.001$. Pohdi, voiko subjektiivisen ennakkotodennäköisyyden käyttöä tässä yhteydessä perustella.

4.3. Tarkastellaan kaksilapsisia perheitä. Oletetaan pojat ja tytöt yhtä todennäköisiksi ja 2. lapsen sukupuoli on riippumaton 1. lapsen sukupuolesta. Tarkastellaan neljää tapahtumaa:

$A =$ 1. lapsi on poika
$B =$ lapset ovat eri sukupuolta
$C =$ 1. lapsi on tyttö
$D =$ 2. lapsi on poika

Mitkä tapahtumaparit $\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}$ ovat keskenään riippumattomat?

4.4. Oletetaan, että $P(X = 0) = 1 - P(X = 1)$ ja $E(X) = c$, missä c on annettu reaaliluku. Laske $P(X = 0)$.

4.5. Olkoon diskreetin satunnaismuuttujan X todennäköisyysfunktio sellainen, että $f(-1) + f(0) + f(1) = 1$. (ks. Määritelmä 3.5 ja Alaluku 3.3.5))

(a) Jos $f(0) = \frac{1}{2}$, niin mitä on $E(X^2)$?
(b) Jos $f(0) = \frac{1}{2}$ ja $E(X) = \frac{1}{6}$, niin määritä $f(-1)$ ja $f(1)$.

4.6. Valitaan lukujoukosta $C_{50} = \{51, 52, \ldots, 100\}$ satunnaisesti luku X siten, että $P(X = i) = (1/2)^{i-50},\ i = 51, 52, \ldots, 100$. (ks. Määritelmä 3.5) Laske (a) $E(X)$ ja (b) $E(\frac{1}{X})$. (Huom. Yleensä $E(\frac{1}{X}) \neq \frac{1}{E(X)}$)

4.7. Uurnassa on a valkoista palloa ja b mustaa palloa. Valitaan uurnasta yksitellen kaksi palloa palauttamatta. Mikä on todennäköisyys, että toiseksi valittu pallo on valkoinen?

4.8. Tarkastele Esimerkkiä 2.8 (Satunnaiskävely, s. 32). Olkoon potissa N euroa, josta Pekalla i ja Paavoll $N - i$. Lantti on sellainen, että
P(Pekka voittaa Paavolta euron) $= p,\ 0 < p < 1$,
P(Paavo voittaa Pekalta euron) $= q$, missä $p + q = 1$. Olkoon $i = 5$ ja $N = 15$. Heitä lanttia ja piirrä Pekan pääoman vaihtelua esittävä kuvaaja (alkupiste $(0, i)$)[R:ssä `sample`-funktio].