TILTA1 Matemaattinen tilastotiede
3. harjoitukset, 39. viikko 2007
Vastauksia

Huom. merkintä (a nCr b) tarkoittaa ”a yli b:n” eli (a nCr b) = (a!)/(b!(a–b)!) = $a^{(b)}$/(b!)

3.1 (a) $I_A(\omega_i) = \begin{cases} 1, \text{ kun } \omega_i \in \{\omega_1,\omega_2,\omega_3\} \\ 0, \text{ kun } \omega_i \in \{\omega_4,\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8\} \end{cases}$; $I_{A^c}(\omega_i) = \begin{cases} 1, \text{ kun } \omega_i \in \{\omega_4,\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8\}=A^C \\ 0, \text{ kun } \omega_i \in \{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}= A \end{cases}$

$\therefore I_{A^c}(\omega_i) = 1 = 1 - I_A(\omega_i)$ arvoilla $\omega_4,\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8$.
$I_{A^c}(\omega_i) = 0 = 1 - I_A(\omega_i)$ arvoilla $\omega_1,\omega_2,\omega_3$.

$\therefore I_{A^c}(\omega_i) = 1 - I_A(\omega_i) \;\; \forall\, \omega_i \in \Omega$.

(b) $I_{A\cap B}(\omega_i) = \begin{cases} 1, \text{ kun } \omega_i \in A\cap B =\{\omega_2,\omega_3\} \\ 0, \text{ kun } \omega_i \in (A\cap B)^C=\{\omega_1,\omega_4,\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8\} \end{cases}$; $I_B(\omega_i) = \begin{cases} 1, \text{ kun } \omega_i \in \{\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}=B \\ 0, \text{ kun } \omega_i \in \{\omega_1,\omega_6,\omega_7,\omega_8\}=B^C \end{cases}$

Kun $\omega_i \in (A\cap B) =\{\omega_2,\omega_3\}$, niin $I_{A\cap B}(\omega_i) = 1$, muutoin $I_{A\cap B}(\omega_i) = 0$.
$I_A(\omega_2)I_B(\omega_2)=1\cdot 1=1$ ja $I_A(\omega_3)I_B(\omega_3)=1\cdot 1=1$.

Kun $\omega_i \in (A\cap B)^C =\{\omega_1,\omega_4,\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8\}$, niin joko $I_A(\omega_i)=0$ tai $I_B(\omega_i)=0$ tai molemmat ovat nollia.
Siis $I_A(\omega_i)I_B(\omega_i)=0$, kun $\omega_i \in (A\cap B)^C$.

$\therefore I_{A\cap B}(\omega_i) = I_A(\omega_i)I_B(\omega_i) \;\; \forall\, \omega_i \in \Omega$.

(c) $I_{A\cup B} = 1 - I_{(A\cup B)^c} = 1 - I_{A^c\cap B^c} \overset{b-kohta}{=} 1 - I_{A^c}I_{B^c} \overset{a-kohta}{=} 1 - (1-I_A)(1-I_B)$.

3.2 (a) Ω = {PPP, TPP, PTP, PPT, TTP, TPT, PTT, TTT}; $S_X = \{0,1,2,3\}$

(b) todennäköisyysfunktio:

$$P(X=x) = f_X(x) = \begin{cases} 1/8, & x = 0 \\ 3/8, & x = 1 \\ 3/8, & x = 2 \\ 1/8, & x = 3 \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

kertymäfunktio:

$$P(X \le x) = F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/8, & 0 \le x < 1 \\ 4/8, & 1 \le x < 2 \\ 7/8, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

(c) $F_X(2) = P(X \le 2) = 7/8$ ja $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1/8$.

3.3 (a) (1) $f_X(x) = (1/2)^{x+1} > 0$, kun x = 0, 1, 2, … , eli kun $x \in S_X$;
(2) $f_X(x) = 0$, kun $x \notin S_X$;
(3) $\sum_{x\in S_x} f_X(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{i+1} = \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^i = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$ (suppeneva geometrinen sarja)

(b) $P(X > 3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - [P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)] = 1 - \left[\tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^4\right] = \tfrac{1}{16}$.

3.4 Merk. X = ”naisten lukumäärä otoksessa”.
Hypergeometrinen jakauma: f(x) = (50 nCr x)(50 nCr 10–x)/(100 nCr 10).
P(”ainakin 5 naista”) = $P(5 \le X \le 10) \approx 0.6297$.
R:llä todennäköisyys saadaan esimerkiksi: `sum(dhyper(5:10,50,50,10))`

3.5 (a) Jokaisen sanan todennäköisyys on $(1/3)^5$.
(b) Merk. X = ”kirjaimen a esiintymiskertojen lukumäärä sanassa”.
Nyt P(”saadaan a”) = 1/3 ja P(”ei saada a:ta”) = 2/3.
Todennäköisyysfunktio f(x) = (5 nCr x)$(1/3)^x(2/3)^{5-x}$, kun x = 0,1,2,3,4,5. (Binomijakauma)
(Eli f(0) = 32/243, f(1)=80/243, f(2)=80/243, f(3)=40/243, f(4)=10/243 ja f(5)=1/243)

3.6 (a) Merk. X = ”naisten lukumäärä otoksessa”.

Binomijakauma: $f(x) = (10 \text{ nCr } x)(1/2)^x(1/2)^{10-x}$.

Nyt P(”ainakin 5 naista”) = $P(5 \le X \le 10) \approx 0.6230$.

R:llä todennäköisyys saadaan esimerkiksi: `sum(dbinom(5:10,10,1/2))`

(b) Merk. X = ”miesten lukumäärä otoksessa”.

- palauttaen

Binomijakauma: $f(x) = (100 \text{ nCr } x)(2/5)^x(3/5)^{100-x}$.

Nyt $P(40 \le X \le 49) \approx 0.5108$.

R:llä todennäköisyys saadaan esimerkiksi: `sum(dbinom(40:49,100,2/5))`

- palauttamatta

Hypergeometrinen jakauma: $f(x) = (400 \text{ nCr } x)(600 \text{ nCr } 100-x)/(1000 \text{ nCr } 100)$.

Nyt $P(40 \le X \le 49) \approx 0.5194$.

R:llä todennäköisyys saadaan esimerkiksi: `sum(dhyper(40:49,400,600,100))`

3.7 Arpalippujen valinta palauttaen

(a) kertymäfunktio:

$F_X(x) = P(X \le x) = (x/20)^5$; tarkemmin ottaen

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 1 \\ (1/20)^5, & \text{kun } 1 \le x < 2 \\ (2/20)^5, & \text{kun } 2 \le x < 3 \\ (3/20)^5, & \text{kun } 3 \le x < 4 \\ : & \\ : & \\ (18/20)^5, & \text{kun } 18 \le x < 19 \\ (19/20)^5, & \text{kun } 19 \le x < 20 \\ 1, & \text{kun } x \ge 20. \end{cases}$$

todennäköisyysfunktio: $f_X(x) = F_X(x) - F_X(x-1) = (x/20)^5 - ((x-1)/20)^5$, kun $x = 1, 2, \ldots, 20$.

(b) Nyt todennäköisyysfunktio: $f_X(x) = (x/n)^r - ((x-1)/n)^r$, kun $x = 1, 2, \ldots, n$.

3.8 Arpalippujen valinta palauttamatta

kertymäfunktio:

$F_Y(y) = P(Y \le y) = (y \text{ nCr } 5)/(20 \text{ nCr } 5) = y^{(5)}/20^{(5)}$; tarkemmin ottaen

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{kun } y < 5 \\ (5 \text{ nCr } 5)/(20 \text{ nCr } 5) = 5^{(5)}/20^{(5)}, & \text{kun } 5 \le y < 6 \\ (6 \text{ nCr } 5)/(20 \text{ nCr } 5) = 6^{(5)}/20^{(5)}, & \text{kun } 6 \le y < 7 \\ (7 \text{ nCr } 5)/(20 \text{ nCr } 5) = 7^{(5)}/20^{(5)}, & \text{kun } 7 \le y < 8 \\ : & \\ : & \\ (18 \text{ nCr } 5)/(20 \text{ nCr } 5) = 18^{(5)}/20^{(5)}, & \text{kun } 18 \le y < 19 \\ (19 \text{ nCr } 5)/(20 \text{ nCr } 5) = 19^{(5)}/20^{(5)}, & \text{kun } 19 \le y < 20 \\ 1, & \text{kun } y \ge 20. \end{cases}$$

todennäköisyysfunktio:

$f_Y(y) = F_Y(y) - F_Y(y-1) = [(y \text{ nCr } 5) - ((y-1) \text{ nCr } 5)]/(20 \text{ nCr } 5) = [y^{(5)} - (y-1)^{(5)}]/20^{(5)}$,

kun $y = 5, 6, \ldots, 20$.