TILTA1 Matemaattinen tilastotiede
12. harjoitukset, 49. viikko 2007
Vastauksia

12.1 Nyt $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}}e^{-Q(x,y)/2}$, missä $Q(x,y)=\dfrac{1}{1-\rho^2}\left(x^2-2\rho xy+y^2\right)$. Tämän perusteella

voidaan päätellä, että X ~ N(0,1) ja Y ~ N(0,1), kun verrataan yllä olevaa kaksiulotteisen normaalijakauman tiheysfunktioon. (X:n ja Y:n reunajakaumat voidaan myös johtaa integroimalla.)
Koska Var(X)=Var(Y)=1, niin Cov(X,Y) = Cor(X,Y) = ρ .
Ja koska Cov(X,Y) = E(XY) - 0·0 = E(XY), niin E(XY) = ρ .

12.2 (a) Yhteisjakauma $f(x,y)$ ja Y:n reunajakauma $f_Y(y)$ tunnetaan (edellisen tehtävän mukaan Y ~ N(0,1)), joten

$$f(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\dfrac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(x^2-2\rho xy+y^2\right)}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(x^2-2\rho xy+y^2\right)-\left(-\frac{y^2}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}e^{\frac{-x^2+2\rho xy-y^2}{2(1-\rho^2)}+\frac{y^2(1-\rho^2)}{2(1-\rho^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}e^{\frac{-x^2+2\rho xy-y^2\rho^2}{2(1-\rho^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x-\rho y)^2}.$$

Siis X|Y=y ~ N($\rho y, 1-\rho^2$).

(b) X ja Y ovat riippumattomia $\Leftrightarrow$ $f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$
$\Leftrightarrow$ $f_X(x|y)\cdot f_Y(y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$
$\Leftrightarrow$ $f_X(x|y) = f_X(x)$ $\forall$ x, y (Nyt $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$)
$\Leftrightarrow$ $\rho y = 0$ ja $1-\rho^2 = 1$ $\forall$ y
$\Leftrightarrow$ $\rho = 0$.

12.3 (a) Jos Cov(X–Y, X+Y) = 0, niin myös Cor(X–Y, X+Y) = 0. Tutkitaan kovarianssia.
Tapa I: Cov(X–Y, X+Y) = E[(X–Y)(X+Y)] – [E(X–Y)][E(X+Y)]
= E[(X–Y)(X+Y)] – [E(X) –E(Y)][E(X)+E(Y)] = E(X^2 + XY–YX–Y^2) – (0–0)(0+0)
= E(X^2 – Y^2) = E(X^2) – E(Y^2) = Var(X) –Var(Y) = 1 – 1 = 0.
Tapa II: Cov(X–Y, X+Y) = Cov(X,X) + Cov(X,Y) + Cov(–Y,X) + Cov(–Y,Y)
= Cov(X,X) + Cov(X,Y) – Cov(Y,X) – Cov(Y,Y) = Cov(X,X) – Cov(Y,Y)
= Var(X) –Var(Y) = 1 – 1 = 0.
Siis Cor(X–Y, X+Y) = 0. Nyt X–Y ja X+Y noudattavat normaalijakaumaa (lineaarinen muunnos normaalijakautuneille muuttujille säilyttää normaalisuuden). Normaalijakauman tapauksessa korreloimattomuus ja riippumattomuus ovat yhtäpitäviä (Lause 5.11). Siis X–Y ja X+Y ovat riippumattomia.

(b) Nyt E(X–Y) = E(X+Y) = 0, Var(X–Y) = Var(X) + Var(Y) – 2·Cov(X,Y) = 1 + 1 – 2·0.6 = 0.8 ja Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2·Cov(X,Y) = 1 + 1 + 2·0.6 = 3.2.
Siis X–Y ~ N(0,0.8) ja X+Y ~ N(0,3.2), lisäksi X–Y ja X+Y riippumattomat.

P(X–Y<1,X+Y>2) = P(X–Y<1)P(X+Y>2) = P(X–Y<1)[1–P(X+Y<2)]
= P(Z< $\frac{1-0}{\sqrt{0.8}}$)[1– P(Z< $\frac{2-0}{\sqrt{3.2}}$)] = $\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{0.8}}\right)\left[1-\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{3.2}}\right)\right]$, kun Z ~ N(0,1)
= Φ(1.12)[1 – Φ(1.12)] = 0.8686(1–0.8686) $\approx$ 0.114.

R:llä:
```
pnorm(1,0,sqrt(0.8))*(1-pnorm(2,0,sqrt(3.2)))
[1] 0.1144113
```

12.4 Tässä tehtävässä merkitään: $Z \sim N(0,1)$.

(a) $X \sim N(-3, 5^2)$, joten

$$P(-5 \le X \le 5) = P\left(\tfrac{-5-(-3)}{5} \le Z \le \tfrac{5-(-3)}{5}\right) = P(-0.4 \le Z \le 1.6) = \Phi(1.6) - [1-\Phi(0.4)]$$
$$= 0.9452 - 1 + 0.6554 = 0.6006$$

R:llä:
```
pnorm(5,-3,5)-pnorm(-5,-3,5)
[1] 0.6006224
```

Lauseen 5.11 mukaan $X|Y{=}13 \sim N(0, 4^2)$.

$$P(-5 \le X \le 5 \mid Y = 13) = P\left(\tfrac{-5-0}{4} \le Z \le \tfrac{5-0}{4}\right) = P(-1.25 \le Z \le 1.25) = \Phi(1.25) - [1-\Phi(1.25)]$$
$$= 2 \cdot \Phi(1.25) - 1 = 2 \cdot 0.8944 - 1 = 0.7888$$

R:llä:
```
pnorm(5,0,4)-pnorm(-5,0,4)
[1] 0.7887005
```

(b) Nyt $Y \sim N(10, 3^2)$, joten

$$P(7 \le Y \le 16) = P(-1 \le Z \le 2) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) - 1 + \Phi(1) = 0.9772 - 1 + 0.8413 = 0.8185.$$

R:llä:
```
pnorm(16,10,3)-pnorm(7,10,3)
[1] 0.8185946
```

Lauseen 5.11 mukaan $Y|X{=}2 \sim N(59/5, (12/5)^2)$.

$$P(7 \le Y \le 16 \mid X = 2) = P(-2 \le Z \le 1.75) = \Phi(1.75) - \Phi(-2) = \Phi(1.75) - 1 + \Phi(2)$$
$$= 0.9599 - 1 + 0.9772 = 0.9371.$$

R:llä:
```
pnorm(16,59/5,12/5)-pnorm(7,59/5,12/5)
[1] 0.9371907
```

(c) Lauseen 5.11 mukaan X ja Y eivät ole riippumattomia, sillä $\rho \ne 0$. Lisäksi huomataan, että $P(-5 \le X \le 5) \ne P(-5 \le X \le 5 \mid Y = 13)$ ja samoin $P(7 \le Y \le 16) \ne P(7 \le Y \le 16 \mid X = 2)$. Siis X ja Y eivät ole riippumattomat.

12.5 Tässä tehtävässä merkitään: $Z \sim N(0,1)$.

(a) $Y \sim N(347,689)$, joten $P(309.2 < Y < 380.6) = P(-1.44 < Z < 1.28) = \Phi(1.28) - [1 - \Phi(1.44)]$
$= 0.8997 - 1 + 0.9251 = 0.8248$.

R:llä:
```
pnorm(380.6,347,sqrt(689))-pnorm(309.2,347,sqrt(689))
[1] 0.8248132
```

(b) Lauseen 5.11 mukaan $Y|X{=}385.1 \sim N(354.92945, 645.9375)$, joten
$P(309.2 < Y < 380.6 \mid X{=}385.1) = P(-1.80 < Z < 1.01) = \Phi(1.01) - [1 - \Phi(1.80)]$
$= 0.8438 - 1 + 0.9641 = 0.8079$.

R:llä:
```
pnorm(380.6,354.92945,sqrt(645.9375))-pnorm(309.2,354.92945,sqrt(645.9375))
[1] 0.8077761
```

12.6 (a) Tapa I: satunnaismuuttujat U=X+Y ja V=X–Y voidaan ilmaista $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, joten

$$Cov\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Cov\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \\ \sigma_1^2 - \sigma_2^2 & \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_U^2 & \sigma_{UV} \\ \sigma_{UV} & \sigma_V^2 \end{pmatrix}$$

Huomaa, että $\sigma_{12} = \rho\sigma_1\sigma_2$.

Kovarianssimatriisi voidaan muodostaa myös laskemalla matriisin alkiot yksitellen:

Tapa II: $\sigma_U^2 = Var(U) = Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2$,

vastaavasti $\sigma_V^2 = Var(V) = Var(X-Y) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$ ja

$$\sigma_{UV} = Cov(U,V) = Cov(X+Y, X-Y) = Cov(X,X) - Cov(X,Y) + Cov(Y,X) - Cov(Y,Y)$$
$$= Var(X) - Var(Y) = \sigma_1^2 - \sigma_2^2 .$$

Kovarianssimatriisi muodostuu kuten edellä.

(b) (U,V) noudattaa 2-ulotteista normaalijakaumaa, koska normaalijakautuneiden satunnaismuuttujien lineaarinen muunnos säilyttää lineaarisuuden♦. Nyt siis

$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} \mu_U \\ \mu_V \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_U^2 & \sigma_{UV} \\ \sigma_{UV} & \sigma_V^2 \end{pmatrix}\right)$, missä odotusarvovektori koostuu alkioista $\mu_U = \mu_1 + \mu_2$ ja $\mu_V = \mu_1 - \mu_2$, ja kovarianssimatriisi on kuten a-kohdassa.

12.7 Nyt *Cov(X,Y) = Cor(X,Y) = ρ.*

(a) $E\left[(Y - aX - b)^2\right] = E\left[((Y - aX) - b)^2\right] = E\left[((Y - aX)^2 - 2b(Y - aX) + b^2\right]$

$$= E\left[Y^2 - 2aXY + a^2X^2 - 2bY + 2abX + b^2\right]$$
$$= E(Y^2) - 2aE(XY) + a^2E(X^2) - 2bE(Y) + 2abE(X) + b^2$$
$$= 1 - 2a\rho + a^2 \cdot 1 - 2b \cdot 0 + 2ab \cdot 0 + b^2 = 1 - 2a\rho + a^2 + b^2,$$

koska $E(X^2) = Var(X) + [E(X)]^2 = 1 + 0 = 1$, $E(Y^2) = Var(Y) + [E(Y)]^2 = 1 + 0 = 1$ ja $E(XY) = Cov(X,Y) + E(X)E(Y) = \rho + 0 \cdot 0 = \rho$.

(b) $q(a,b) = E\left[(Y - aX - b)^2\right] = 1 - 2a\rho + a^2 + b^2$

$$\geq 1 - 2a\rho + a^2 = q(a,0)$$
$$= 1 - \rho^2 + \rho^2 - 2a\rho + a^2 = 1 - \rho^2 + (\rho - a)^2$$
$$\geq 1 - \rho^2 .$$

Siis *q(a,b)* minimoituu, kun *a*=*ρ* ja *b*=0.

12.8 Nyt $Y - \hat{Y} = Y - a - b(X - \mu_1) = (Y - \mu_2) + \mu_2 - a - b(X - \mu_1)$

$$= \sigma_2\left(\frac{Y - \mu_2}{\sigma_2}\right) + \mu_2 - a - b\sigma_1\left(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}\right) = \sigma_2 Y^* + \mu_2 - a - b\sigma_1 X^* = \sigma_2 Y^* - b\sigma_1 X^* - (a - \mu_2),$$

missä X^*~N(0,1) ja Y^*~N(0,1).

Tutkitaan, millä *a*:n ja *b*:n arvoilla $E(Y - \hat{Y})^2$ saavuttaa miniminsä.

Nyt $q(a,b) = E(Y - \hat{Y})^2 = E\left[\sigma_2 Y^* - b\sigma_1 X^* - (a - \mu_2)\right]^2 = E\left[\sigma_2\left(Y^* - \frac{b\sigma_1}{\sigma_2}X^* - \frac{a - \mu_2}{\sigma_2}\right)\right]^2$

$= \sigma_2^2 E\left(Y^* - \frac{b\sigma_1}{\sigma_2}X^* - \frac{a - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2$, joten tehtävän 12.7. mukaan minimissä

$\frac{b\sigma_1}{\sigma_2} = \rho \Leftrightarrow b = \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}$ ja $\frac{a - \mu_2}{\sigma_2} = 0 \Leftrightarrow a = \mu_2$. Siis minimissä $a = \mu_2$ ja $b = \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}$.

♦ Perustelu: X ja Y voidaan lausua määritelmän 5.7 muunnoksen (5.9.11) avulla riippumattomien N(0,1)-jakautuneiden Z_1 ja Z_2 lineaarikombinaatioina. Täten X+Y ja X–Y voidaan lausua Z_1 ja Z_2 lineaarikombinaatioina. Seuraa, että X+Y ja X–Y noudattavat 1-ulotteisia normaalijakaumia (Lause 5.4). Koska U=X+Y ja V=X–Y noudattavat normaalijakaumaa, niin U ja V voidaan lausua määritelmän 5.7 mukaisesti joidenkin riippumattomien N(0,1)-jakautuneiden W_1 ja W_2 avulla. Siis määritelmän 5.7 nojalla (U,V) ~ N_2-jakaumaa.

Tehtävään 12.3. liittyvä huomautus asiasta kiinnostuneille:

Satunnaismuuttujien U=X–Y ja V=X+Y riippumattomuus voidaan johtaa myös niiden yhteisjakauman $f_{U,V}(u,v)$ avulla. Se saadaan seuraavasti:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-0.6^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-0.6^2)}\left(x^2-2\cdot 0.6xy+y^2\right)\right]=\frac{1}{2\pi\cdot 4/5}\exp\left[-\frac{1}{2\cdot 16/25}\left(x^2-1.2xy+y^2\right)\right]$$

Merkitään U = X–Y ja V = X+Y, jolloin x = $\frac{u+v}{2}$ ja y = $\frac{v-u}{2}$.

Nyt $f_{U,V}(u,v)=|J|\,f_{X,Y}\left(\frac{u+v}{2},\frac{v-u}{2}\right)$, missä J = $\frac{1}{2}$. Sijoittamalla saadaan

$$f_{U,V}(u,v)=\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi\cdot 4/5}\exp\left[-\frac{1}{2\cdot 16/25}\left(\frac{4}{5}u^2+\frac{1}{5}v^2\right)\right]=\frac{1}{2\pi\cdot 8/5}\exp\left(-\frac{u^2}{2\cdot 4/5}\right)\exp\left(-\frac{v^2}{2\cdot 16/5}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi\cdot(2/\sqrt{5})\cdot(4/\sqrt{5})}\exp\left(-\frac{u^2}{2\cdot\left(2/\sqrt{5}\right)^2}\right)\exp\left(-\frac{v^2}{2\cdot\left(4/\sqrt{5}\right)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2/\sqrt{5}}\exp\left(-\frac{u^2}{2\cdot\left(2/\sqrt{5}\right)^2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 4/\sqrt{5}}\exp\left(-\frac{v^2}{2\cdot\left(4/\sqrt{5}\right)^2}\right)=f_U(u)\cdot f_V(v)$$

Nyt $f_{U,V}(u,v)=f_U(u)\cdot f_V(v)$ eli U ja V ovat riippumattomat.
Huomataan, että U~N(0, $(2/\sqrt{5})^2$) eli U~N(0,0.8) ja V~N(0, $(4/\sqrt{5})^2$) eli V~N(0,3.2).